

Ю.Б. Румер

А.И. Фет

ТЕОРИЯ

УНИТАРНОЙ СИММЕТРИИ

Ю.Б. Румер, А.И. Фет

ТЕОРИЯ УНИТАРНОЙ СИММЕТРИИ

Ю.Б.Румер и А.И.Фет

ТЕОРИЯ УНИТАРНОЙ СИММЕТРИИ

Книга состоит из 18 глав, разбитых на 3 части: математическое введение, унитарная классификация адронов, массовые формулы.

В первой части излагаются основные факты из теории комплексных линейных пространств и конструкций над ними, основные свойства групп, алгебр и их представлений. При изложении приводятся точные формулировки определений и теорем, доказательства теорем, как правило, опускаются. В эту часть включены многочисленные комментарии, поясняющие значение и причину возникновения приводимых результатов.

Во второй части приводятся во всех подробностях исследование тех частных групп (и их представлений), которые нужны для описания симметрии сильных взаимодействий, т. е. групп $SU(2)$, $SU(3)$, $SU(4)$ и $SU(6)$. В этой части внимание обращается на те стороны теории, которые необходимы для физики.

Последняя часть посвящена выводу массовых формул, и она является более физической, чем математической. Для массовых формул предлагается новое обоснование, позволяющее трактовать их более широким образом.

В библиографии приведены основные работы по излагаемому вопросу.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
ЧАСТЬ I. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ	11
Глава 1. Комплексные евклидовы пространства и операторы в них	11
§ 1.1. Определения	11
§ 1.2. Линейные операторы	16
Глава 2. Конструкции над пространствами и операторами	22
§ 2.1. Дуальные пространства	22
§ 2.2. Ортогональная сумма пространств	26
§ 2.3. Тензорное (кронеккерово) произведение пространств	34
§ 2.4. Тензорное произведение операторов	37
§ 2.5. Случай любого числа сомножителей	39
Глава 3. Тензорная алгебра над комплексным евклидовым пространством	41
§ 3.1. Определение	41
§ 3.2. Задание тензора координатами	43
§ 3.3. Индуцированный оператор	46
§ 3.4. Другие способы определения тензора	50
§ 3.5. Умножение и свертывание тензоров	53
§ 3.6. Симметрические и антисимметрические тензоры	55
Глава 4. Группы и алгебры	60
§ 4.1. Группы. Определения и простейшие свойства	60
§ 4.2. Примеры групп	65
§ 4.3. Представления групп	70
§ 4.4. Алгебры Ли. Определения и основные свойства	74
§ 4.5. Примеры алгебр Ли	78
§ 4.6. Связь между группами и алгебрами Ли	88
§ 4.7. Представления алгебр Ли	95
Глава 5. Представления групп $SU(n)$	99
§ 5.1. Представления $SU(2)$	99
§ 5.2. Представления $SU(3)$	103
§ 5.3. Представления $SU(n)$ при любом n	112
§ 5.4. Тензороператоры и операторные представления	121

ЧАСТЬ II. УНИТАРНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ АДРОНОВ	127
Глава 6. Квантовая механика и теория групп	127
§ 6.1. Физические системы	128
§ 6.2. Гильбертово пространство	130
§ 6.3. Наблюдаемые	133
§ 6.4. Роль представлений групп в квантовой механике	135
§ 6.5. Алгебраические свойства операторов моментного типа	142
Глава 7. Спин и группа $SU(2)$	149
§ 7.1. Введение спина в квантовую механику	149
§ 7.2. Группа вращений, группа $SU(2)$ и их представления	154
§ 7.3. Спин в $SU(2)$ -трактовке	158
§ 7.4. Фермионы и бозоны	161
§ 7.5. Два состояния или две частицы?	161
Глава 8. Зарядовые мультиплеты	163
§ 8.1. Дублет протон — нейтрон	163
§ 8.2. Триплеты и квадруплеты	166
Глава 9. Классификация адронов с помощью представлений группы $SU(3)$	169
§ 9.1. Мотивировка	169
§ 9.2. Алгебра Ли $ASU(3)$	179
§ 9.3. Разложение октета и декуплета на изотопические мультиплеты	184
§ 9.4. Эмпирический вывод операторов заряда, гиперзаряда и изоспина	192
§ 9.5. Принципы $SU(3)$ -описания элементарных частиц	195
§ 9.6. Три типа изоспина	197
Глава 10. Примеры супермультиплетов	202
§ 10.1. Октет баронов	202
А. Векторы состояния с точки зрения T -спина	202
Б. Векторы состояния с точки зрения U -спина	204
§ 10.2. Декуплет баронов	206
А. Векторы состояния с точки зрения T -спина	206
Б. Векторы состояния с точки зрения U -спина	207
Глава 11. $SU(3)$ -теория для произвольных супермультиплетов	209
§ 11.1. Построение T -базиса	209
§ 11.2. Уточнение принципов $SU(3)$ -классификации	217
Глава 12. Построение элементарных частиц из кварков	221
§ 12.1. Системы частиц со спином в квантовой механике	221
§ 12.2. Основные предположения о кварках	223

§ 12.3.	Кварковый состав супермультиплетов	229
§ 12.4.	Заключительные замечания о кварках	230
Глава 13.	Группа $SU(6)$ и ее подгруппы	232
§ 13.1.	Мотивировка введения группы $SU(6)$	232
§ 13.2.	Алгебра Ли $ASU(6)$. Спин, момент и гипермомент	236
§ 13.3.	Вигнеров спин. Странный и нестранный спин	247
Глава 14.	Классификация адронов с помощью представлений группы $SU(6)$	257
§ 14.1.	Описание представлений группы $SU(6)$	257
§ 14.2.	Принципы $SU(6)$ -описания элементарных частиц	262
	А. $SU(3)$ -редукция	264
	Б. $SU(4)$ -редукция	268
Глава 15.	Примеры гипермультиплетов	272
§ 15.1.	35-плет мезонов	272
	А. $SU(3)$ -редукция	273
	Б. $SU(4)$ -редукция	278
§ 15.2.	56-плет барионов	295
	А. $SU(3)$ -редукция	295
	Б. $SU(4)$ -редукция	301
§ 15.3.	Другие гипермультиплеты	326
Глава 16.	Магнитные моменты и гипермоменты	327
§ 16.1.	Определения момента и гипермомента адрона	327
§ 16.2.	Примеры вычисления магнитного момента и гипермомента	330
	А. 35-плет мезонов	330
	Б. 56-плет барионов	332
Часть III.	МАССОВЫЕ ФОРМУЛЫ	337
Глава 17.	Массовые формулы	337
§ 17.1.	Возмущение оператора энергии магнитным полем	338
§ 17.2.	Унитарный момент и унитарное поле в $SU(3)$ -теории	342
§ 17.3.	Свертки Окубо и операторы Казимира группы $SU(3)$	351
§ 17.4.	Формула масс в $SU(3)$ -теории	355
	А. Гиперзарядовое расщепление супермультиплетов	357
	Б. Зарядовое расщепление супермультиплетов	361
§ 17.5.	Унитарный момент и унитарное поле в $SU(6)$ -теории	362
§ 17.6.	Формула масс в $SU(6)$ -теории	372
	А. 56-плет барионов	378
	Б. 35-плет мезонов	379

Глава 18. Интерпретация массовых формул. Отождествление и смешение частиц	381
§ 18.1. Массовые формулы и понятие элементарной частицы	381
А. 56-плет барионов	383
Б. 35-плет мезонов	384
§ 18.2. Смешение частиц типа $\Phi - \omega$	388
§ 18.3. Смешение частиц типа $\Sigma^0 - \Lambda$	392
§ 18.4. Заключительные замечания	393
Литература	396
Предметный указатель	397

ПРЕДИСЛОВИЕ

Возникшая в последние годы новая теория элементарных частиц, названная теорией унитарной симметрии, представляет принципиально новую ступень в развитии физики. Эта теория, построенная в 1961 г. в независимых работах Гелл-Манна [2] и Неемана [6] ($SU(3)$ -симметрия), позволила создать стройную систематику адронов. Включение спина в теорию унитарной симметрии (группа $SU(6)$) является заслугой Гюрши и Радикати [3] и, независимо, Пайса [9].

Отправным пунктом теории послужила идея Гейзенберга рассматривать протон и нейтрон как два состояния одной частицы — «нуклона» ([4], 1932 г.).

Классификация, вытекающая из теории унитарной симметрии, играет для адронов роль, аналогичную таблице Менделеева для атомов; все адроны без исключения входят в эту классификацию, и аналогия подчеркивается предсказанием знаменитой частицы Ω^- .

Несомненно, унитарная симметрия будет основой любой будущей «динамики» адронов. Элементы такой динамики уже намечаются в так называемых массовых формулах.

Физические представления теории унитарной симметрии выросли на почве квантовой механики, однако методы, применяемые в ней, связаны с той частью описания квантовых систем, которая раньше занимала, казалось, лишь подчиненное место. Речь идет о теории групп. В обычной квантовой механике «группы симметрии» играли вспомогательную роль: в основе теории лежало «динамическое уравнение» (Шредингера, Дирака), которое в известных условиях оказывалось инвариантным относительно некоторой группы преобразований.

Считалось, что уравнения в принципе могли бы быть решены и без групп, а группы рассматривались как математический метод, позволяющий извлекать частичную информацию о квантовой системе без интегрирования уравнений. Таким образом, квантовая механика в ее традиционном изложении еще укладывалась в рамки классической математической физики.

Развитие физики в последние годы обратило, в известном смысле, соотношение между уравнениями движения и группами симметрии. Теперь группа симметрии физической системы выступает на первый план; представления этой группы и ее подгрупп несут самую фундаментальную информацию о системе. Таким образом, группы оказываются первичным, наиболее глубоким элементом физического описания природы. Самые понятия пространства и времени играют при этом роль «материала» для построения представлений групп, обычное же место, отводимое им в физике, объясняется лишь историческими причинами. Наконец, «уравнениям движения» отводится роль условий, накладываемых на векторы некоторого функционального пространства для выделения неприводимых представлений группы, или же уравнений инфинитезимального представления той же группы. При таком смещении основных концепций не кажется больше очевидным, что каждому виду частиц и полей должно вообще отвечать какое-либо уравнение движения, да и самая универсальность схемы описания, известной под названием «теории поля», оказывается под вопросом.

Можно было бы усомниться, оправдывают ли достижения теории унитарной симметрии столь радикальную ломку основных физических представлений. Но в действительности эта теория вовсе не является единственным источником изложенных выше взглядов. Развитие квантовой теории поля со времени основополагающей работы Вигнера (1939 г.) [12] привело к ее трактовке на основе представлений группы Пуанкаре, что позволило впервые определить понятие элементарной частицы. Что касается роли уравнений движения, то приведенная выше их характеристика заимствована нами почти дословно из замечательной работы С. Вайнберга по квантовой теории поля (1964 г.).

Возвращаясь к унитарной симметрии, следует отметить, что традиционное описание с помощью уравнений движения для адронов не удалось, и до открытия высших групп симметрии десятки разрозненных частиц образовывали разраставшийся хаос, бросавший вызов теоретической физике.

Теперь же для адронов существует стройная математическая система. Следует, однако, отметить *существенно нерелятивистский характер этой системы*; мы воздержались от изложения различных попыток релятивистского обобщения унитарной симметрии.

Предлагаемая книга возникла из лекций, читанных авторами в Новосибирском государственном университете. Авторы не ставили себе целью изложить все (или даже все существенное) из области унитарной симметрии.

Книга содержит лишь те части теории, которые можно рассматривать как прочно установленные, и которые должны войти, в той или иной форме, в любую будущую теорию. В качестве таких разделов мы рассматриваем классификацию адронов по представлениям групп $SU(3)$ и $SU(6)$, а также массовые формулы (Гелл-Манна — Окубо [7] и Бега — Синга [1]).

Для массовых формул предлагается новое обоснование, позволяющее, как мы полагаем, придать им некоторый «динамический» аспект.

Сопоставление теории с опытом проводится лишь весьма схематически. Сколько-нибудь подробное обсуждение экспериментальных данных выходит за рамки этой книги (и за рамки компетенции авторов).

Математический аппарат, применяемый в теории унитарной симметрии, непривычен для физиков. Поскольку группы и алгебры Ли, как это теперь очевидно, призваны играть ведущую роль в дальнейшем развитии физики, в книге излагается все необходимое, предполагая у читателя лишь самые простые сведения о векторах и матрицах. С одной стороны, мы ограничились в отношении математического аппарата строго необходимым, приводя без доказательства общие теоремы и сопровождая изложение большим числом примеров. С другой стороны, мы стремились дать читателю ясное понимание смысла применяемого аппарата.

Квантовая механика необходима для понимания аналогий, составляющих физическое содержание теории унитарной симметрии. Все аналогии проведены подробно, хотя они могут показаться (а в будущем наверняка покажутся) наивными.

Читатель, готовый принять некоторые понятия квантовой механики в несколько догматической трактовке, с формальной стороны может предварительно ничего о ней не знать. Это делает книгу доступной для математиков. Деление книги на три части соответствует содержанию частей, которое можно было бы охарактеризовать словами: математика, кинематика, динамика.

Литературные ссылки ограничиваются несколькими основными работами. Подробные литературные указания можно найти в статье [10].

Мы выражаем благодарность Б. В. Медведеву, прочитавшему книгу в рукописи и сделавшему ряд замечаний, позволивших существенно улучшить изложение.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

ГЛАВА 1

КОМПЛЕКСНЫЕ ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА И ОПЕРАТОРЫ В НИХ

§ 1.1. Определения

Комплексное евклидово пространство является естественным обобщением обычного (действительного) евклидова пространства. Мы будем предполагать, что задано некоторое множество предметов, называемых *векторами*. В разных вопросах векторы могут иметь различную природу; существенны лишь свойства их, перечисленные ниже и скопированные (с известными видоизменениями) со свойств обычных векторов трехмерного пространства. Векторы обозначаются через x, y, \dots

I. Векторы можно складывать, причем сложение их обладает обычными алгебраическими свойствами:

$$(x + y) + z = x + (y + z); \quad x + y = y + x;$$

существует такой вектор 0 , что для всех $x, x + 0 = x$; при любых x, y существует единственный вектор z такой, что

$$x + z = y.$$

II. Векторы можно умножать на комплексные числа (в этом состоит отличие комплексных евклидовых пространств от действительных), причем умножение на числа обладает обычными алгебраическими свойствами:

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \\ (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad 1 \cdot x = x.$$

III. Векторы можно скалярно умножать друг на друга. Так как при этом возникают свойства, несколько более сложные, чем в элементарной векторной алгебре, и связанные с *комплексностью пространства*, мы поясним эти свойства подробнее. Обозначим скалярное произведение

векторов x, y через $(x|y)$. Тогда предполагается, что для любых комплексных чисел α, β и любых векторов x, y, z

$$\begin{aligned}(\alpha x + \beta y|z) &= \bar{\alpha} (x|z) + \bar{\beta} (y|z), \\(z|\alpha x + \beta y) &= \alpha (z|x) + \beta (z|y)\end{aligned}\quad (1.1.1)$$

(обратите внимание на первое из этих правил: из первого сомножителя выносятся не множители α, β , а им сопряженные!). Далее, предполагается, что всегда

$$(x|x) \geq 0, \quad (1.1.2)$$

причем при $x \neq 0$ $(x|x) > 0$.

Длина вектора x определяется формулой

$$|x| = \sqrt{(x|x)}. \quad (1.1.3)$$

Комплексное евклидово пространство называется *конечномерным*, если оно удовлетворяет следующему условию:

IV. Существует система из n линейно независимых векторов e_1, e_2, \dots, e_n , через которые можно линейно выразить каждый вектор:

$$x = \sum_{i=1}^n x^i e_i. \quad (1.1.4)$$

Комплексные числа x^i называются *координатами* вектора в базисе $\{e_i\}$. Число n называется *размерностью* комплексного евклидова пространства, которое обозначается дальше через $C(n)$. Размерность $C(n)$ обозначается через $\dim C(n)$. В математической литературе $C(n)$ называется еще *унитарным пространством*. Отметим, что скалярное произведение не коммутативно; из (1.1.1) и (1.1.2) следует, что в равенстве $(x + y|x + y) = (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y)$ все члены, кроме $(x|y)$ и $(y|x)$, действительны; значит, $(x|y) + (y|x)$ действительно; аналогично, действительным оказывается также число $(ix|y) + (y|ix) = -i(x|y) + i(y|x)$, откуда следует правило, заменяющее коммутативный закон умножения:

$$(x|y) = \overline{(y|x)}. \quad (1.1.5)$$

Из (I) — (IV) можно еще вывести неравенство Коши:

$$|(x|y)| \leq |x| \cdot |y|. \quad (1.1.6)$$

Мы перечислили все свойства $C(n)$, которыми будем в этой книге пользоваться. В дальнейшем мы будем следо-

вать тому же методу: вводя какое-либо математическое понятие, будем перечислять те свойства вводимых объектов, которые дальше используются, отсылая за подробностями к специальной литературе.

Комментарии

1. Формула (1.1.4) позволяет сопоставить каждому вектору x систему из n комплексных чисел (x^1, x^2, \dots, x^n) . Но ни в коем случае не следует думать, что вектор *есть* эта система чисел! Если бы мы выбрали другой базис e'_1, e'_2, \dots, e'_n , то получили бы для того же вектора x другое разложение

$$x = \sum_{i=1}^n x^i e'_i.$$

Таким образом, вектор x имеет координаты относительно любого базиса, и численные значения этих координат зависят также от выбора базиса, а не только от вектора x . Совокупность *всех* систем (x^1, x^2, \dots, x^n) , $(x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{n'})$, ..., соответствующих всевозможным базисам, полностью характеризуется вектором x (и характеризует его). Эта совокупность и может быть отождествлена с вектором.

Действия над векторами в координатах. Можно доказать, что в $C(n)$ существуют *ортонормированные базисы* $\{e_i\}$, т. е. такие, что

$$(e_i | e_k) = \delta_{ik}, \quad (1.1.7)$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & (i \neq k), \\ 1 & (i = k). \end{cases} \quad (1.1.8)$$

В дальнейшем мы будем пользоваться только ортонормированными базисами, и все координаты берутся относительно таких базисов.

Заметим, что если $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$, то $x = (e_i | x)$. Условимся опускать знак суммирования по индексу, встречающемуся один раз сверху и один раз снизу: $\sum_{i=1}^n x^i e_i = x^i e_i$ (правило Эйнштейна). В фиксированном базисе $\{e_i\}$ имеем:

$$x + y = (x^i + y^i) e_i, \quad \lambda x = \lambda x^i e_i, \quad (x | y) = \sum_{i=1}^n \bar{x}^i y^i. \quad (1.1.9)$$

Изоморфизм пространств. Пусть заданы два комплексных евклидовых пространства и соответствие (отображение) φ , сопоставляющее каждому вектору x пространства C вектор x' , пространства C' . Такое соответствие обозначается записью

$$\varphi : C \rightarrow C'. \quad (1.1.10)$$

Рассмотрим частный случай *взаимно однозначного* соответствия, при котором каждый вектор x' соответствует одному, и только одному, вектору x . Если φ удовлетворяет условиям

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x+y) &= \varphi(x) + \varphi(y), & \varphi(\lambda x) &= \lambda \varphi(x), \\ (\varphi(x)|\varphi(y))_{C'} &= (x|y)_C, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.11)$$

то φ называется *изоморфизмом* пространств C, C' , которые в этом случае называются *изоморфными*.

Обратное отображение $\varphi^{-1} : C' \rightarrow C$, сопоставляющее вектору x' его прообраз x , т. е. тот единственный вектор x , для которого $\varphi(x) = x'$, обладает, очевидно, теми же свойствами (1.1.11) и тем самым является изоморфизмом пространств C', C .

Можно показать, что если одно из пространств C, C' конечномерно, то и другое конечномерно, причем их размерности совпадают. Обратное, два конечномерных пространства одинаковой размерности изоморфны, но их изоморфизм определяется неоднозначно.

Пусть в пространствах C, C' заданы базисы и тем самым координаты x^i, x'^i . Тогда изоморфизм может быть задан уравнениями вида $x'^i = A^i_j x^j$.

Антиизоморфизм пространств. Если взаимно однозначное соответствие (1.1.10) удовлетворяет вместо (1.1.11) условиям

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x+y) &= \varphi(x) + \varphi(y), & \varphi(\lambda x) &= \bar{\lambda} \varphi(x), \\ (\varphi(x)|\varphi(y))_{C'} &= \overline{(x|y)}_C, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.12)$$

то φ называется *антиизоморфизмом* пространств C, C' .

Обратное отображение φ^{-1} также оказывается в этом случае антиизоморфизмом.

Можно показать, что если одно из пространств C, C' , конечномерно, то и другое конечномерно, причем их размерности совпадают.

Пусть в пространствах C , C' заданы базисы и тем самым координаты x^i , x'^i . Тогда антиизоморфизм может быть задан уравнениями вида $x'^i = A_j^i x^j$.

Подпространства. Пусть пространство C состоит из векторов пространства C' . Тогда C называется *подпространством* C' , если сложение, умножение на числа и скалярное произведение в C определены так же, как в C' . Можно показать, что из конечномерности C' следует конечномерность C , причем

$$\dim C \leq \dim C'. \quad (1.1.13)$$

Если в C' введены координаты, то любое подпространство C может быть описано как множество тех векторов из C' , координаты которых удовлетворяют не более чем n линейным уравнениям, $n = \dim C'$.

Гильбертово пространство. Рассмотрим теперь *бесконечномерное* комплексное евклидово пространство $C(\infty)$, обладающее следующими свойствами:

IV'. Существует такая бесконечная последовательность векторов в $C(\infty)$

$$e_1, e_2, \dots, e_n, \dots, \quad (1.1.14)$$

что для любого вектора x существует однозначное разложение

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x^i e_i, \quad (1.1.15)$$

где суммирование ряда понимается в смысле

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| x - \sum_{i=1}^n x^i e_i \right| = 0 \quad (1.1.16)$$

(аналог формулы (1.1.4)).

V. Если последовательность векторов x_n такова, что

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} |x_m - x_n| = 0, \quad (1.1.17)$$

то существует вектор x_0 , к которому x_n сходятся:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_0| = 0 \quad (1.1.18)$$

(аналог известного в анализе критерия сходимости Коши).

Такое пространство $C(\infty)$ называется *гильбертовым пространством*. Можно показать, что все гильбертовы пространства изоморфны друг другу *).

§ 1.2. Линейные операторы

Линейным оператором L в $C(n)$ называется правило (закон, отображение), по которому каждому вектору x ставится в соответствие некоторый вектор Lx (образ x), причем

$$L(x + y) = Lx + Ly, \quad L(\lambda x) = \lambda L(x). \quad (1.2.1)$$

Фиксируем базис $\{e_i\}$ и опишем действие оператора L в координатах. Пусть

$$Le_i = L_i^j e_j \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.2.2)$$

Тогда для каждого x $Lx = L(x^i e_i) = x^i Le_i = x^i L_i^j e_j$, так что, полагая $Lx = y$, имеем:

$$y^j = L_i^j x^i. \quad (1.2.3)$$

Матрица L_i^j называется *матрицей оператора* L в базисе e .

Ни в коем случае не следует считать, что оператор L и матрица L_i^j — одно и то же! Пока мы, фиксируя базис, изучаем в одном и том же базисе разные операторы и соотношения между ними, можно пренебречь различием между оператором и его матрицей, так как одно определяет другое, но при изменении базиса тот же оператор L изображается *другой* матрицей: в базисе $\{e'_i\}$, аналогично (1.2.3), имеем $y^{j'} = L_i'^j x^{i'}$.

Так как все системы координат равноправны, набор чисел L_i^j характеризует не оператор L , а совокупность оператора и выбранного базиса. Лишь система из всех матриц $L_i^j, L_i'^j, \dots$ оператора L во *всевозможных* базисах может быть отождествлена с оператором L . Настоящими объектами теории являются векторы и операторы, а не координаты и матрицы, служащие лишь для описания век-

*) Мы определили понятие гильбертова пространства уже, чем это обычно делается, включив в определение условие *сепарабельности* IV'.

торов и операторов в произвольном базисе. Впрочем, как мы увидим дальше, задание оператора или системы операторов в $C(n)$ иногда позволяет естественным образом выделить базис, наиболее удобный для изучения этих операторов, и векторам этого базиса можно приписать физический смысл. Но сначала некоторые операторы должны быть заданы тем или иным способом.

Действия над операторами. Пусть L, M — операторы в $C(n)$; суммой их $L + M$ называется оператор, переводящий каждый вектор x в вектор $Lx + Mx$.

В любом базисе матрица оператора $L + M$ имеет вид

$$(L + M)_i^j = L_i^j + M_i^j. \quad (1.2.4)$$

Произведение оператора L на комплексное число λ есть оператор, переводящий x в λLx ; его матрица есть

$$(\lambda L)_i^j = \lambda L_i^j. \quad (1.2.5)$$

Произведение LM операторов L, M есть оператор, переводящий x в $L(Mx)$, т. е. результат последовательного применения операторов M, L в указанном только что порядке: сначала M , затем L . Как правило, $LM \neq ML$. Матрица оператора LM есть

$$(LM)_i^j = L_k^j M_i^k. \quad (1.2.6)$$

Легко проверить, что выполнены обычные законы умножения (кроме коммутативного!):

$$\left. \begin{aligned} (LM)N &= L(MN), \\ (\lambda L) \cdot M &= L \cdot (\lambda M) = \lambda \cdot (LM), \\ L(M + N) &= LM + LN, \\ (M + N)L &= ML + NL. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.7)$$

Тождественный (единичный) оператор $\epsilon(n)$ переводит каждый вектор в тот же вектор:

$$\epsilon(n)x = x. \quad (1.2.8)$$

Матрица тождественного оператора в любом базисе есть

$$\epsilon(n)_i^j = \delta_i^j = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j). \end{cases} \quad (1.2.9)$$

Если $LM = \epsilon(n)$, то L и M называются *взаимно обратными*:

$$M = L^{-1}, \quad L = M^{-1}.$$

Матрицы взаимно обратных операторов связаны соотношениями

$$L_k^j (L^{-1})_i^k = (L^{-1})_i^k L_k^j = \delta_i^j. \quad (1.2.10)$$

Сопряженность операторов. Некоторые типы операторов. Операторы L , \bar{L} называются *сопряженными*, если для всех x, y

$$(\bar{L}x|y) = (x|Ly) \quad (1.2.11)$$

или, в координатах,

$$\bar{L}_i^j = \bar{L}_j^i. \quad (1.2.12)$$

Поскольку (1.2.12) равносильно инвариантному условию (1.2.11), связь между матрицами \bar{L}_i^j , \bar{L}_j^i , записанная в (1.2.12), сохраняется при замене базиса.

Оператор A называется *эрмитовым*, если он сам себе сопряжен, т. е.

$$(Ax|y) = (x|Ay) \quad (1.2.13)$$

или, в координатах,

$$A_i^j = \bar{A}_j^i \quad (1.2.14)$$

(это свойство матрицы A сохраняется при замене базиса).

Оператор U называется *унитарным*, если он сохраняет скалярные произведения, т. е.

$$(Ux|Uy) = (x|y). \quad (1.2.15)$$

(1.2.15) означает, что U сохраняет длины векторов и, следовательно, аналогичен движениям обычного пространства; таким образом, унитарные операторы, по определению, задают *движения* комплексного евклидова пространства $C(n)$.

Свойство (1.2.15) часто бывает удобно заменить эквивалентным свойством, которое получается следующим об-

разом. Можно доказать, что унитарный оператор имеет обратный, т. е. что уравнение $Ux = y$ разрешимо при любом y , и притом единственным образом. Полагая в (1.2.15) $Ux = z$, $x = U^{-1}z$, имеем:

$$(z|Uy) = (U^{-1}z|y).$$

С другой стороны, по определению сопряженного оператора

$$(\overset{\dagger}{U}z|y) = (z|Uy);$$

следовательно,

$$\overset{\dagger}{U} = U^{-1}. \quad (1.2.16)$$

Можно показать, что из (1.2.16), обратно, следует (1.2.15).

В координатах (1.2.16) записывается в виде

$$(U^{-1})_i^j = \overset{\dagger}{U}_i^j = \bar{U}_j^i; \quad (1.2.17)$$

произведение матриц U_i^j , $(U^{-1})_i^j$ должно быть равно (при любом порядке умножения) единичной матрице, откуда

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n \bar{U}_k^j U_j^i &= \delta_{ik}, \\ \sum_{j=1}^n \bar{U}_j^i U_j^k &= \delta^{ik}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.18)$$

Можно показать, что каждое из условий (1.2.18) в отдельности уже равносильно унитарности оператора U ; таким образом, эти условия сохраняются при замене базиса.

Подчеркнем, что свойство оператора быть унитарным (или эрмитовым) не зависит от системы координат, а только от характера его действия на векторы (см. (1.2.13) и (1.2.15)); но для того чтобы задать или изучить такой оператор, можно воспользоваться произвольным базисом и матрицей, удовлетворяющей (1.2.14) или (1.2.18).

Каждому оператору L можно поставить в соответствие число $\det L$, называемое *определителем оператора*. Для этого заметим, что если в базисе $\{e_i\}$ оператор L имеет матрицу $(L_i^j)_e$, а в базисе $\{e'_i\}$ матрицу $(L_i^j)_{e'}$, то, как

легко видеть, матрицы $L_e, L_{e'}$ подобны, т. е.

$$L_{e'} = UL_e U^{-1}, \quad (1.2.19)$$

где U — унитарная матрица (эта матрица изображает в базисе e оператор, переводящий e_i в e'_i , $i = 1, 2, \dots, n$). Так как при умножении матриц их определители перемножаются, то

$$\det(U^{-1}) = (\det U)^{-1},$$

$$\det L_{e'} = \det L_e.$$

Мы видим, что определитель матрицы оператора L не зависит от выбора базиса и может быть поэтому назван определителем самого оператора L .

Если оператор имеет обратный, то его определитель, очевидно, не равен нулю; можно показать, что это условие также и достаточно для существования обратного оператора.

Как видно из (1.2.17), определитель унитарного оператора есть число, модуль которого равен единице.

Оператор L называется *унимодулярным*, если его определитель равен единице. В дальнейшем особую роль играют операторы, которые унитарны и унимодулярны. Найдем матрицы таких операторов для $n = 2$ и 3 в любом базисе.

При $n = 2$ они имеют вид (см. § 5.1)

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}, \quad \text{где } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (1.2.20)$$

Так как каждое комплексное число определяется двумя действительными, то система всех унитарных унимодулярных матриц зависит от трех действительных параметров.

При $n = 3$ получаем матрицы вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (1.2.21)$$

подчиненные семи соотношениям

$$\sum_{j=1}^3 \bar{a}_{ij} a_{kj} = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad \det |a_{ij}| = 1. \quad (1.2.22)$$

Первые шесть соотношений выражают унитарность оператора; при $i = k$ имеем три действительных соотношения, а при $i \neq k$ — три комплексных, каждое из которых равносильно двум действительным.

Полученные шесть действительных соотношений, как можно показать, независимы. Что касается последнего из соотношений (1.2.22), то, в силу предыдущих условий, обеспечивающих унитарность оператора, оно равносильно *одному* добавочному действительному соотношению $\arg \det |a_{ij}| = 0$. Таким образом, соотношения (1.2.22) равносильны *десяти* независимым действительным соотношениям, и система матриц (1.2.21) зависит от $2 \cdot 3^2 - 10 = 8$ действительных параметров.

Отметим еще класс *проектирующих* операторов, играющих важную служебную роль в теории операторов. Пусть комплексное евклидово пространство $C(n)$ представлено в виде *ортогональной суммы* подпространств $C(k)$ и $C(l)$:

$$C(n) = C(k) \oplus C(l); \quad (1.2.23)$$

это значит, что каждый вектор x пространства $C(n)$ однозначно разлагается в сумму

$$x = x' + x'', \quad (1.2.24)$$

где x' лежит в $C(k)$, x'' — в $C(l)$ и $(x'|x'') = 0$. Оператор P , ставящий в соответствие вектору x его *проекцию* x' на подпространство $C(k)$, называется *проектирующим*. Легко видеть, что проектирующий оператор эрмитов и идемпотентен:

$$(Px|y) = (x|Py), \quad P^2 = P. \quad (1.2.25)$$

Обратно, всякий оператор в $C(n)$, обладающий свойствами (1.2.25), является, как можно показать, проектирующим; подпространство, на которое он проектирует, состоит из всех векторов вида Px , где x пробегает все пространство $C(n)$.

КОНСТРУКЦИИ НАД ПРОСТРАНСТВАМИ И ОПЕРАТОРАМИ

В этой главе рассматриваются основные конструкции над комплексными евклидовыми пространствами, в некотором смысле аналогичные операциям над комплексными числами. Комплексному сопряжению соответствует антиизоморфизм, связывающий пару взаимно дуальных пространств; сумме чисел соответствует ортогональная сумма пространств; наконец, произведению чисел соответствует тензорное (кронекерово) произведение пространств.

Каждой конструкции над пространствами соответствует конструкция над операторами. Именно, оператору в данном пространстве ставится в соответствие некоторый оператор в дуальном пространстве; системе операторов, заданных в слагаемых пространствах (по одному в каждом слагаемом), соответствует оператор в сумме этих пространств; системе операторов, заданных в пространствах-сомножителях, соответствует оператор, заданный в их произведении.

Описываемые конструкции составляют основу тензорной алгебры и теории представлений групп, излагаемых в следующих главах.

§ 2.1. Дуальные пространства

Рассмотрим пару комплексных евклидовых пространств C , \bar{C} , векторы которых мы будем обозначать через x, y, \dots (для C) и через \bar{x}, \bar{y}, \dots (для \bar{C}). Таким образом, векторы C всегда отличны от векторов \bar{C} , и их не следует смешивать. Предположим, что задан антиизоморфизм

$$\varphi : C \rightarrow \bar{C}. \quad (2.1.1)$$

Тогда пространства C , \tilde{C} называются *дуальными* по отношению к антиизоморфизму φ (или просто дуальными, подразумевая задание φ).

Для более четкого различения векторов пространства \tilde{C} от векторов пространства C мы будем называть векторы \tilde{C} *ковекторами*.

По определению антиизоморфизма (см. (1.1.12)), для всех x, \tilde{y} имеем:

$$(\varphi^{-1}\tilde{y} | x)_C = \overline{(\varphi\varphi^{-1}\tilde{y} | \varphi x)}_{\tilde{C}} = \overline{(\tilde{y} | \varphi x)}_{\tilde{C}}. \quad (2.1.2)$$

Для упрощения записей полезно ввести новый вид скалярного произведения — *скалярное произведение ковектора на вектор* — по формуле:

$$\langle \tilde{y} | x \rangle = (\varphi^{-1}\tilde{y} | x)_C = \overline{(\tilde{y} | \varphi x)}_{\tilde{C}}. \quad (2.1.3)$$

Как нетрудно показать, это скалярное произведение обладает следующими свойствами:

$$\left. \begin{aligned} \langle \alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y} | z \rangle &= \alpha \langle \tilde{x} | z \rangle + \beta \langle \tilde{y} | z \rangle, \\ \langle \tilde{z} | \alpha x + \beta y \rangle &= \alpha \langle \tilde{z} | x \rangle + \beta \langle \tilde{z} | y \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.4)$$

Комментарии

1. Скалярное произведение $\langle \tilde{x} | y \rangle$ существенно отличается от введенного выше произведения $(x | y)$: теперь речь идет о произведении векторов *разных* пространств. На первом месте всегда стоит ковектор, а на втором — вектор. Поэтому выражения вида $\langle x | \tilde{y} \rangle$ не рассматриваются; не имеет смысла вопрос о коммутационных свойствах произведения и о «произведении с равными сомножителями» (ср. (1.1.5), (1.1.2)).

Далее, первое свойство дистрибутивности (2.1.4) существенно отличается от первого равенства (1.1.1): числа теперь выносятся за знак произведения без комплексного сопряжения.

Таковы формальные различия между скалярными произведениями $(x | y)$ и $\langle \tilde{x} | y \rangle$.

2. Заметим, что каждый фиксированный ковектор \tilde{y} определяет линейную функцию

$$l(x) = \langle \tilde{y} | x \rangle$$

с комплексными значениями на C , и аналогично, каждый фиксированный вектор x определяет линейную функцию

$$\tilde{l}(\tilde{y}) = \langle \tilde{y} | x \rangle \quad (2.1.5)$$

на \tilde{C} . В силу условий (2.1.2) ненулевые векторы (ковекторы) определяют при этом ненулевые функции. Можно показать, что все линейные функции на C и \tilde{C} могут быть получены указанным способом с помощью ковекторов и векторов. Итак, каждое из двух дуальных пространств можно отождествить с пространством всех линейных функций на другом.

Различие между (2.1.4) и (1.1.1) теперь становится понятным; по отношению к первому аргументу «внутреннее» скалярное произведение $(x|y)$ представляет собой не линейную функцию в обычном смысле, как (2.1.5), а «антилинейную функцию»:

$$l(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha}l(x) + \beta l(y).$$

3. Можно показать, что размерности дуальных пространств совпадают; мы будем их впредь обозначать через $C(n)$, $\tilde{C}(n)$.

4. Отношение произведения $\langle | \rangle$ к произведению $(|)$ есть, по существу, отношение между пространствами состояний квантовой механики в трактовке Дирака и, соответственно, фон Неймана. Каждая из этих трактовок имеет свои преимущества в различных случаях, и мы используем в этой книге обе.

Последнее замечание не существенно для понимания дальнейшего.

Дуальные базисы. Пусть e_1, \dots, e_n — ортонормированный базис в $C(n)$ (напомним, что мы рассматриваем только такие базисы, и в дальнейшем слово «ортонормированный» опускается). Можно доказать, что существует однозначно определенный базисом e_i базис $\tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^n$ в $\tilde{C}(n)$ такой, что

$$\langle \tilde{e}^k | e_i \rangle = \delta_i^k. \quad (2.1.6)$$

Именно, $\tilde{e}^k = \Phi(e_k)$, где Φ — антиизоморфизм, служащий для определения дуальности пространств.

Базисы e, \tilde{e} называются *дуальными*; как выяснится дальше, удобно писать номера ковекторов \tilde{e} сверху.

Координаты ковектора мы, напротив, будем нумеровать нижними индексами:

$$\tilde{x} = x_i \tilde{e}^i = \sum_{i=1}^n x_i \tilde{e}^i. \quad (2.1.7)$$

Для скалярного произведения вектора y и ковектора \tilde{x} , разложенных по дуальным базисам, получаем формулу

$$\langle \tilde{x} | y \rangle = x_i y^i. \quad (2.1.8)$$

В дальнейшем, рассматривая одновременно $C(n)$ и $\tilde{C}(n)$, мы будем всегда выбирать в них дуальные базисы и вести вычисления в этом предположении.

Заметим еще, что в дуальных базисах антиизоморфизм Φ записывается в виде $\tilde{x}_i = \tilde{x}^i$ ($i = 1, \dots, n$).

Дуальные операторы. Операторы L, \tilde{L} , действующие, соответственно, в $C(n)$ и $\tilde{C}(n)$, называются *дуальными*, если для всех \tilde{x}, y

$$\langle \tilde{L}\tilde{x} | Ly \rangle = \langle \tilde{x} | y \rangle. \quad (2.1.9)$$

Найдем связь между матрицами операторов L, \tilde{L} . По определению чисел L_i^j, \tilde{L}_j^k (ср. (1.2.2))

$$Le_i = L_i^j e_j, \quad \tilde{L}\tilde{e}^k = \tilde{L}_j^k \tilde{e}^j, \quad (2.1.10)$$

откуда, в силу (2.1.9),

$$\langle \tilde{L}\tilde{e}^k | Le_i \rangle = \tilde{L}_j^k L_i^j = \delta_i^k. \quad (2.1.11)$$

Отсюда ясно, что матрицы L и \tilde{L} взаимно обратны:

$$\tilde{L}_i^j = (L^{-1})_i^j. \quad (2.1.12)$$

Оператор, у которого существует дуальный оператор, имеет тем самым и обратный оператор.

Если, в частности, $L = U$ — унитарный оператор, то из (1.2.17) получаем

$$\tilde{U}_i^j = \bar{U}_j^i. \quad (2.1.13)$$

Из (1.2.18) теперь следует, что оператор, дуальный унитарному, унитарен в $\tilde{C}(n)$.

Комментарий

Из определения (2.1.3) скалярного произведения $\langle | \rangle$ легко следует, что $\tilde{L} = \varphi \tilde{L}^{-1} \varphi^{-1}$, или, что то же: если $\tilde{y} = \varphi(x)$, то $L\tilde{y} = \varphi(\tilde{L}^{-1}x)$.

Таким образом, дуальный к L оператор получается из \tilde{L}^{-1} «переносом» с помощью антиизоморфизма φ .

§ 2.2. Ортогональная сумма пространств

Пусть $C(n_1), \dots, C(n_s)$ — комплексные евклидовы пространства. Построим из них новое пространство C , векторы которого суть формальные суммы

$$x^1 \oplus x^2 \oplus \dots \oplus x^s, \quad (2.2.1)$$

где x^i — вектор $C(n_i)$.

Знак \oplus введен здесь в отличие от обычного знака суммы, так как «суммирование» в (2.2.1) есть просто формальное соединение векторов различных пространств в цепочку, следовательно, не сложение их в каком-либо заданном заранее пространстве.

Некоторые из чисел n_1, \dots, n_s могут быть равны друг другу; в этом случае мы считаем соответствующие $C(n_i)$ различными экземплярами одного и того же пространства (так как они изоморфны). Условимся выписывать $C(n_i)$ в порядке убывания чисел n_i .

Определим в C сложение векторов, умножение векторов на числа и скалярное умножение по правилам:

$$(x^1 \oplus \dots \oplus x^s) + (y^1 \oplus \dots \oplus y^s) = (x^1 + y^1) \oplus \dots \oplus (x^s + y^s) \quad (2.2.2)$$

(чтобы сложить векторы, надо сложить их компоненты в каждом $C(n_i)$);

$$\lambda(x^1 \oplus \dots \oplus x^s) = \lambda x^1 \oplus \dots \oplus \lambda x^s \quad (2.2.3)$$

(чтобы умножить вектор на число λ , надо умножить на это число все его компоненты);

$$(x \oplus \dots \oplus x | y \oplus \dots \oplus y) = (x | y) + \dots + (x | y)_{C(n_s)} \quad (2.2.4)$$

(чтобы скалярно перемножить векторы, надо скалярно перемножить их соответствующие компоненты и сложить полученные числа).

Выражения (2.2.2) — (2.2.4) показывают, что действия над векторами в C полностью сводятся к действиям над их компонентами в соответствующих слагаемых пространствах $C(n_i)$. C называется ортогональной суммой пространств $C(n_1), \dots, C(n_s)$.

Часто оказывается, что пространство C , содержащее ортогональные подпространства $C(n_1), \dots, C(n_s)$, задано заранее; при этом установлен каким-либо способом однозначный закон разложения векторов C в суммы попарно ортогональных слагаемых

$$x = \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.2.5)$$

где x_i — вектор $C(n_i)$ (ср. (1.2.24)).

В этом случае можно отождествить вектор x из (2.2.5) с формальной суммой (2.2.1) и писать

$$x = x \oplus \dots \oplus x,$$

подчеркивая, таким образом, что речь идет не о какой-либо сумме векторов в C , а о «каноническом» разложении C на однозначно определенные слагаемые по установленному закону. Так как при этом, как можно показать, справедливы правила (2.2.2) — (2.2.4), то говорят, что пространство C разложено в ортогональную сумму подпространств $C(n_1), \dots, C(n_s)$.

Итак, можно рассматривать ортогональные суммы с двух эквивалентных точек зрения: либо сначала задавать пространства $C(n_1), \dots, C(n_s)$ независимо друг от друга и строить из них C с помощью формальных сумм (2.2.1), либо считать, что все $C(n_i)$ уже лежат в некотором

пространстве C , и строить разложение векторов C на слагаемые, лежащие в $C(n_i)$, $i = 1, \dots, s$.

Найдем базис и подсчитаем размерность C . Для этого в каждом $C(n_i)$ построим базис $e_1^i, \dots, e_{n_i}^i$; тогда векторы

$$e_1^1, \dots, e_{n_1}^1, \dots, e_1^s, \dots, e_{n_s}^s \quad (2.2.6)$$

составляют базис C . Значит, размерность C равна сумме размерностей пространств $C(n_i)$, т. е.

$$C = C(n_1 + \dots + n_s).$$

Тот факт, что C разлагается в ортогональную сумму пространств $C(n_i)$, записывается в виде

$$C = C(n_1) \oplus \dots \oplus C(n_s). \quad (2.2.7)$$

Приводимые операторы. Значение разложения пространства в ортогональную сумму состоит в том, что такое разложение часто позволяет упростить изучение операторов, действующих в C .

Предположим, что оператор L , действующий в C , обладает следующим свойством: L переводит каждый вектор пространства $C(n_i)$ в вектор того же пространства ($i = 1, \dots, s$). Тогда говорят, что ортогональное разложение (2.2.7) приводит оператор L . Если рассматривать действие оператора L только на подпространстве $C(n_i)$, то получается оператор L_i , действующий в $C(n_i)$; отношение между оператором L и порожденными им операторами L_i записывается в виде

$$L = L_1 \oplus \dots \oplus L_s. \quad (2.2.8)$$

Обратно, если в каждом $C(n_i)$ действует оператор L_i , то в C существует их сумма — оператор, представленный формулой (2.2.8). Ясно, что если все L_i унитарны, то и L унитарен.

Если существует разложение C (не менее чем из двух слагаемых), приводящее оператор L , то L называется *приводимым*, в противном случае — *неприводимым*.

Ясно, что изучение приводимого оператора L полностью сводится к изучению операторов L_i , каждый из ко-

торых «автономно» действует в своем подпространстве $C(n_i)$ меньшей размерности, чем у C . Отсюда понятен интерес к неприводимым операторам и к разложению произвольных операторов на неприводимые.

В физике играет важную роль более общее понятие приводимости для системы операторов. Пусть дана некоторая система (множество) операторов G , действующих в C . Если каждый из операторов G переводит векторы каждого $C(n_i)$ в векторы того же $C(n_i)$, то говорят, что ортогональное разложение (2.2.7) приводит систему операторов G ; система G называется в этом случае *приводимой*. Если же не существует разложения (2.2.7), приводящего G , то система G называется *неприводимой*. Заметим, что каждый отдельный оператор из G может оказаться приводимым, тогда как система G в целом — неприводимой. Мы увидим дальше, что эрмитовы и унитарные операторы всегда приводимы; между тем, существуют неприводимые системы таких операторов. Причину этого явления легко понять: для каждого отдельного оператора из G можно иногда подобрать приводящее его разложение, но ни одно такое разложение не приводит их *все сразу*.

Разложению (2.2.7) соответствует базис (2.2.6), в котором можно записать каждый действующий в C оператор L :

$$y^j = L_i^j x^i \quad (j = 1, \dots, n; n = n_1 + \dots + n_s). \quad (2.2.9)$$

Если x лежит в $C(n_h)$, то $x^i = 0$ для всех i , кроме тех, которые удовлетворяют неравенствам

$$n_1 + \dots + n_{k-1} + 1 \leq i \leq n_1 + \dots + n_{k-1} + n_h; \quad (2.2.10)$$

для i , удовлетворяющих (2.2.10), x^i произвольны. Для всех таких x векторы y , определяемые формулой (2.2.9), должны также иметь нулевые координаты при i , не удовлетворяющих (2.2.10). Отсюда следует, что $L_i^j = 0$ при i , удовлетворяющих (2.2.10), и j , не удовлетворяющих (2.2.10).

Итак, L_i^j могут быть отличны от нуля лишь в ящиках матрицы L , в которых оба индекса удовлетворяют

одному и тому же из неравенств (2.2.10), $k = 1, \dots, s$. Таким образом, матрица приводимого оператора в специально приспособленном к разложению (2.2.7) базисе (2.2.6) имеет вид

$$\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} L_1^1 \dots L_{n_1}^1 \\ \vdots \\ L_1^{n_1} \dots L_{n_1}^{n_1} \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} L_{n_1+1}^{n_1+1} \dots L_{n_1+n_2}^{n_1+1} \\ \vdots \\ L_{n_1+1}^{n_1+n_2} \dots L_{n_1+n_2}^{n_1+n_2} \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

(2.2.11)

Из (2.2.11) ясно, как матричные элементы оператора L выражаются через матричные элементы операторов L_i , $i = 1, \dots, s$. Оператор L называется *диагонализуемым*, если его приводит некоторое разложение (2.2.7) на *одномерные* подпространства; в этом случае, при надлежащем

выборе базиса, матрица (2.2.11) оказывается диагональной:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (2.2.12)$$

Собственные векторы и собственные значения. Пусть L диагоналируем; тогда (2.2.7) имеет вид

$$C = \overset{1}{C}(1) \oplus \dots \oplus \overset{n}{C}(1), \quad (2.2.13)$$

и из уравнений (2.2.9) видно, что

$$Le_i = \lambda_i e_i. \quad (2.2.14)$$

Уравнение вида

$$Lx = \lambda x \quad (2.2.15)$$

называется *уравнением собственных значений*. Все его ненулевые решения x , при данном значении параметра λ , называются *собственными векторами оператора L* , принадлежащими λ . Значение λ , для которого существует хотя бы один собственный вектор, называется *собственным значением оператора L* .

Задача о собственных значениях состоит в вычислении собственных значений и в определении собственных векторов заданного оператора. (2.2.14) показывает, что для диагоналируемого L собственными значениями служат λ_i , а собственными векторами — векторы выбранного специального базиса e_i . Обратно, если в C существует ортонормированный базис e_1, \dots, e_n , состоящий из собственных векторов оператора L , то все векторы вида αe_i , где α — комплексное число, составляют подпространство $\overset{i}{C}(1)$ пространства C и имеет место разложение (2.2.13); тем самым L оказывается диагоналируемым.

Важными примерами диагоналируемых операторов являются эрмитовы операторы и унитарные операторы.

Можно доказать, что для эрмитова оператора в $\overset{n}{C}(n)$ существует ортонормированный базис, состоящий из n его собственных векторов, причем все собственные значе-

ния λ_k действительны. Можно доказать, что унитарный оператор в $C(n)$ имеет ортонормированный базис, состоящий из n собственных векторов; соответствующие собственные значения по модулю равны единице: $\lambda_k = e^{i\varphi_k}$. Если λ — собственное значение, то все собственные векторы, принадлежащие λ (т. е. решения (2.2.15), не равные нулю), вместе с нулевым вектором образуют *собственное подпространство* S_λ ; размерность r этого подпространства называется *кратностью* λ , а собственное значение λ — *r -кратно вырожденным* (при $r > 1$).

Часто рассматриваются общие собственные векторы двух или нескольких эрмитовых операторов. Если для эрмитовых операторов A, B существует ортонормированный базис, состоящий из их общих собственных векторов, то эти операторы перестановочны. Верно и обратное: для двух (или нескольких) перестановочных эрмитовых операторов можно построить ортонормированный базис, состоящий из их общих собственных векторов. Чтобы построить такой базис, достаточно заметить, что каждый из перестановочных операторов переводит в себя любое собственное подпространство другого, и можно строить собственные векторы B , не выходя из собственных подпространств A . Это не значит, однако, что *каждый* собственный вектор A является собственным вектором B : так обстоит дело лишь для вектора, принадлежащего *простому* собственному значению A (кратности 1).

В случае произвольного оператора приведение к диагональному виду, вообще говоря, невозможно. Уравнение собственных значений (2.2.15) в произвольном базисе записывается в виде

$$(L_i^j - \lambda \delta_i^j) x^i = 0 \quad (2.2.16)$$

и имеет нетривиальные решения x^i в том и только в том случае, когда

$$\det |L_i^j - \lambda \delta_i^j| = 0. \quad (2.2.17)$$

Уравнение (2.2.17) называется *вековым уравнением* и служит для определения собственных значений; подробнее

это уравнение можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} L_1^1 - \lambda & L_2^1 & \dots & L_n^1 \\ L_1^2 & L_2^2 - \lambda & \dots & L_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_1^n & L_2^n & \dots & L_n^n - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.2.18)$$

Левая часть (2.2.18) есть полином n -й степени относительно λ ; следовательно, число собственных значений любого оператора не больше n .

По теореме Виета сумма корней уравнения (2.2.18), взятых с их алгебраической кратностью (как корней уравнения, а не как собственных значений; обе кратности совпадают для диагоналируемых операторов), равна коэффициенту при $(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}$:

$$\text{Sp}L = \sum_{i=1}^n L_i^i = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (2.2.19)$$

В § 1.2 было доказано, что определитель оператора не зависит от выбора базиса; применяя это к (2.2.17), мы видим,

что сумма $\sum_{i=1}^n L_i^i$ в (2.2.19) является числовым инвариантом оператора L . Инвариант $\text{Sp}L$ называется следом L .

Другой инвариант, $\det L$, по той же теореме Виета равен произведению корней:

$$\det L = \prod_{i=1}^n \lambda_i. \quad (2.2.20)$$

Для каждого оператора L существует однозначное разложение

$$L = \text{Sp}L \cdot \epsilon(n) + L_0, \quad (2.2.21)$$

где $\epsilon(n)$ — тождественный оператор, а L_0 — бесследный оператор (с нулевым следом).

§ 2.3. Тензорное (кронеккерово) произведение пространств

Мы видели, каким образом можно из заданных пространств построить их «сумму» (2.2.7), причем операторы, действующие в «слагаемых» пространствах, также имеют «сумму» (2.2.8) — оператор, действующий в «сумме» пространств.

Другой важный способ построения более сложных пространств из более простых можно назвать «умножением»; при этом, как мы увидим, «перемножаются» и операторы, действующие в пространствах-«сомножителях», так что получается оператор, действующий в «произведении» пространств.

Начнем, для простоты, с двух пространств $C(m)$, $C(n)$; векторы первого будем обозначать x, x_1, x', \dots , векторы второго — y, y_1, y', \dots . Базисы в $C(m)$ будем обозначать через e_1, \dots, e_m , в $C(n)$ — через f_1, \dots, f_n . Рассмотрим всевозможные формальные выражения вида

$$\sum_{i=1}^p x_i \otimes y_i = x_1 \otimes y_1 + \dots + x_p \otimes y_p \quad (2.3.1)$$

с любым числом «слагаемых» p , где x_i — векторы из $C(m)$, а y_i — из $C(n)$. Знак \otimes здесь играет чисто формальную роль «разделителя» между x_i и y_i : если бы мы записывали их подряд $(x_i y_i)$, как это делалось в старой литературе, надо было бы все время помнить, что речь идет не о «внутреннем» (вроде скалярного) произведении векторов одного пространства, а о некотором формальном аналоге умножения для векторов из разных пространств. Знак $+$ (и Σ) в (2.3.1) тоже имеет формальный характер и не означает суммирования ни в каком заранее заданном пространстве.

Совершенно несущественно, что «собой представляют» формальные суммы (2.3.1), существенны лишь правила действий над ними, которые сейчас будут перечислены (ср. (2.2.2) — (2.2.4)). Прежде всего, условимся считать два выражения вида (2.3.1) *равными*, если они могут быть получены друг из друга конечным числом следующих *элементарных операций*:

1. Если в (2.3.1) входит член $x \otimes y$ и $x = x' + x''$ в $C(m)$, то этот член заменяется на $x' \otimes y + x'' \otimes y$:

$$(x' + x'') \otimes y = x' \otimes y + x'' \otimes y. \quad (2.3.2)$$

Аналогично правую часть (2.3.2), если она входит в выражение (2.3.1), можно заменить левой.

2. Аналогично взаимозаменяемы стороны равенства

$$x \otimes (y' + y'') = x \otimes y' + x \otimes y''. \quad (2.3.3)$$

3. Аналогично взаимозаменяемы стороны равенства

$$\lambda x \otimes y = x \otimes \lambda y. \quad (2.3.4)$$

Если, в частности, можно привести выражение (2.3.1) элементарными преобразованиями к виду $0 \otimes 0$ (слева — нулевой вектор в $C(m)$, справа — нулевой вектор в $C(n)$), то оно обозначается просто через 0. Множество всех выражений вида (2.3.1), с отождествлением равных выражений, обозначим через $C(m) \otimes C(n)$.

Оказывается, для выражений (2.3.1) можно установить действия сложения, умножения на комплексное число и скалярного умножения, так что $C(m) \otimes C(n)$ превращается в комплексное евклидово пространство размерности mn (ср. случай ортогональной суммы $C(m) \oplus C(n)$, где размерности складываются!).

Сумма определяется по правилу:

$$\begin{aligned} (x'_1 \otimes y'_1 + \dots + x'_p \otimes y'_p) + (x''_1 \otimes y''_1 + \dots + x''_q \otimes y''_q) = \\ = x'_1 \otimes y'_1 + \dots + x'_p \otimes y'_p + x''_1 \otimes y''_1 + \dots + x''_q \otimes y''_q. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Это значит, что для сложения двух выражений (2.3.1) надо их просто выписать подряд, соединив знаком плюс. Часто при этом в правой части возможны упрощения с помощью элементарных операций; например, если в оба слагаемых входит $x \otimes y$, то «приводят подобные члены»:

$$x \otimes y + x \otimes y = (x + x) \otimes y = 2x \otimes y.$$

Умножение на комплексное число определяется по правилу:

$$\begin{aligned} \lambda(x_1 \otimes y_1 + \dots + x_p \otimes y_p) &= \lambda x_1 \otimes y_1 + \dots + \lambda x_p \otimes y_p = \\ &= x_1 \otimes \lambda y_1 + \dots + x_p \otimes \lambda y_p. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Скалярное умножение определяется сначала для «мономов»:

$$(x' \otimes y' | x'' \otimes y'') = (x' | x'')_{C(m)} \cdot (y' | y'')_{C(n)}, \quad (2.3.7)$$

а затем для «полиномов»:

$$\left(\sum_i x'_i \otimes y'_i \mid \sum_j x''_j \otimes y''_j \right) = \sum_{i,j} (x'_i \otimes y'_i \mid x''_j \otimes y''_j). \quad (2.3.8)$$

Можно показать, что эти действия удовлетворяют всем требованиям, наложенным выше на действия над векторами комплексного евклидова пространства.

Построим теперь базис и найдем размерность $C(m) \otimes C(n)$.

Если $x = x^i e_i$, $y = y^j f_j$, то

$$x \otimes y = x^i y^j e_i \otimes f_j. \quad (2.3.9)$$

представляет разложение монома $x \otimes y$ по базисным мономам $e_i \otimes f_j$.

Разлагая таким образом все мономы в (2.3.1), мы можем представить любой вектор ξ из $C(m) \otimes C(n)$ в виде

$$\xi = \xi^{ij} e_i \otimes f_j. \quad (2.3.10)$$

Оказывается, векторы $e_i \otimes f_j$ ортонормированы и, следовательно, составляют базис в $C(m) \otimes C(n)$; когда мы это покажем, мы тем самым найдем и размерность пространства $C(m) \otimes C(n)$, так как число векторов $e_i \otimes f_j$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$) равно mn .

По определению скалярного произведения мономов (2.3.7)

$$(e_i \otimes f_j | e_k \otimes f_l) = (e_i | e_k) \cdot (f_j | f_l) = \delta_{ik} \delta_{jl};$$

правая часть отлична от нуля лишь при $i = k$, $j = l$, т. е. когда векторы $e_i \otimes f_j$, $e_k \otimes f_l$ совпадают; в этом случае

$\delta_{ii} \cdot \delta_{jj} = 1$. Итак, можно указать ортонормированный базис пространства $C(m) \otimes C(n)$

$$\left. \begin{array}{l} e_1 \otimes f_1; e_1 \otimes f_2; \dots; e_1 \otimes f_n; \\ e_2 \otimes f_1; e_2 \otimes f_2; \dots; e_2 \otimes f_n; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ e_m \otimes f_1; e_m \otimes f_2; \dots; e_m \otimes f_n. \end{array} \right\} \quad (2.3.11)$$

Будем нумеровать векторы базиса в написанном только что порядке; тогда понятно, что означают выражения: «базисный вектор номер (k, l) », «матричный элемент из (i, j) -й строки» и т. д.

§ 2.4. Тензорное произведение операторов

Пусть в $C(m)$ действует оператор M , в $C(n)$ — оператор N . Мы построим по этим операторам новый оператор $M \otimes N$, действующий в $C(m) \otimes C(n)$.

Так как мы хотим определить линейный оператор, то достаточно указать, как нужный нам оператор действует на мономы; по линейности он будет тогда определен для всех полиномов (2.3.1).

Положим

$$L(x \otimes y) = Mx \otimes Ny; \quad (2.4.1)$$

тогда оператор L , действующий на $C(m) \otimes C(n)$, обозначается через $M \otimes N$ и называется тензорным (кронеккеревым) произведением оператора M , действующего на $C(m)$, и оператора N , действующего на $C(n)$. Фиксируем базисы $e_i, f_j, e_i \otimes f_j$ и выразим матрицу оператора $M \otimes N$ через матрицы M и N . Если (см. (1.2.2))

$$\begin{aligned} Me_i &= M_i^j e_j & (i = 1, \dots, m), \\ Nf_k &= N_k^l e_l & (k = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

то

$$L(e_i \otimes f_j) = M_i^k e_k \otimes N_j^l e_l = M_i^k N_j^l e_k \otimes e_l.$$

Следовательно, матричный элемент оператора L , стоящий в строке (k, l) и столбце (i, j) , равен $M_i^k N_j^l$. Если базисные векторы в $C(m) \otimes C(n)$ занумерованы по правилу (2.3.11),

то можно записать матрицу оператора $M \otimes N$ в виде

$M_1^1 N_1^1 \dots M_1^1 N_1^n$: : $M_1^1 N^n \dots M_1^1 N^n$	$M_2^1 N_1^1 \dots M_2^1 N_1^n$: : $M_2^1 N^n \dots M_2^1 N^n$		$M_m^1 N_1^1 \dots M_m^1 N_1^n$: : $M_m^1 N^n \dots M_m^1 N^n$
$M_1^2 N_1^1 \dots M_1^2 N_1^n$: : $M_1^2 N^n \dots M_1^2 N^n$	$M_2^2 N_1^1 \dots M_2^2 N_1^n$: : $M_2^2 N^n \dots M_2^2 N^n$		$M_m^2 N_1^1 \dots M_m^2 N_1^n$: : $M_m^2 N^n \dots M_m^2 N^n$
$M_1^m N_1^1 \dots M_1^m N_1^n$: : $M_1^m N^n \dots M_1^m N^n$	$M_2^m N_1^1 \dots M_2^m N_1^n$: : $M_2^m N^n \dots M_2^m N^n$		$M_m^m N_1^1 \dots M_m^m N_1^n$: : $M_m^m N^n \dots M_m^m N^n$

(2.4.2)

Эта матрица называется *кронеккеревым произведением* матриц M_i^k, N_j^l .

Покажем, что если M и N унитарны, то и $L = M \otimes N$ унитарен. Для этого проверим условия унитарности (1.2.17); в следующем вычислении $\sum_{(i, j)}$ означает суммирование по всем параметрам $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \sum_{(i, j)} \bar{L}_{(k, l)}^{(i, j)} L_{(s, t)}^{(i, j)} &= \sum_{(i, j)} \bar{M}_k^i \bar{N}_l^j M_s^i N_t^j = \\ &= \left(\sum_i \bar{M}_k^i M_s^i \right) \left(\sum_j \bar{N}_l^j N_t^j \right) = \sigma_{ks} \sigma_{lt}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

§ 2.5. Случай любого числа сомножителей

Совершенно аналогично определяется тензорное произведение любого числа пространств

$$C(n) = C(n_1) \otimes \dots \otimes C(n_s), \quad n = n_1 n_2 \dots n_s, \quad (2.5.1)$$

векторы которого имеют вид

$$\sum_j^1 x_j^i \otimes \dots \otimes x_j^s, \quad (2.5.2)$$

где x^i — вектор из $C(n_i)$.

По определению, справедливы равенства

$$\left. \begin{aligned} & x^1 \otimes \dots \otimes (x' + x'') \otimes \dots \otimes x^s = \\ & = x^1 \otimes \dots \otimes x' \otimes \dots \otimes x^s + x^1 \otimes \dots \otimes x'' \otimes \dots \otimes x^s, \\ & \lambda x^1 \otimes x^2 \otimes \dots \otimes x^s = x^1 \otimes \lambda x^2 \otimes \dots \otimes x^s = \\ & = \dots = x^1 \otimes x^2 \otimes \dots \otimes \lambda x^s. \end{aligned} \right\} (2.5.3)$$

Замена левой части такого равенства правой или наоборот есть *элементарная операция* над полиномом (2.5.2); полиномы считаются равными, если переводятся друг в друга элементарными операциями. Действия над векторами из $C(n)$ (т. е. над полиномами (2.5.2), среди которых равные отождествляются и считаются одним и тем же вектором) определяются формулами

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p x_j^1 \otimes \dots \otimes x_j^s + \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j^1 \otimes \dots \otimes x_j^s &= \sum_{j=1}^{p+q} x_j^1 \otimes \dots \otimes x_j^s; \\ \lambda \sum_j^1 x_j^1 \otimes \dots \otimes x_j^s &= \sum_j^1 \lambda x_j^1 \otimes \dots \otimes x_j^s = \dots = \sum_j^1 x_j^1 \otimes \dots \otimes \lambda x_j^s; \\ \left(\sum_i^1 x_i' \otimes \dots \otimes x_i^s \middle| \sum_j^1 x_j'' \otimes \dots \otimes x_j^s \right) &= \sum_{i,j}^s \prod_{k=1}^s (x_i' | x_j''). \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Наконец, если в каждом пространстве $C(n_i)$ действует оператор L_i , то можно определить тензорное произведение

$$L = L_1 \otimes \dots \otimes L_s$$

этих операторов как оператор, действующий на мономы по правилу:

$$L(x^1 \otimes \dots \otimes x^s) = L_1(x^1) \otimes \dots \otimes L_s(x^s). \quad (2.5.5)$$

Тензорное произведение любого числа унитарных операторов есть унитарный оператор.

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА НАД КОМПЛЕКСНЫМ ЕВКЛИДОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

§ 3.1. Определение

Наиболее естественное и удобное для интересующих нас приложений определение тензора состоит в следующем. Фиксируем размерность n ; возьмем p экземпляров C^1, C^2, \dots, C^p пространства $C(n)$ и q экземпляров $\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_q$ дуального пространства $\tilde{C}(n)$. Тогда можно построить комплексное евклидово пространство

$$C(p, q) = C^1 \otimes C^2 \otimes \dots \otimes C^p \otimes \tilde{C}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{C}_q \quad (3.1.1)$$

размерности n^{p+q} . Вектор этого пространства называется тензором над $C(n)$ валентности (p, q) , или, иначе, комплексным тензором над $C(n)$, p раз контравариантным и q раз ковариантным.

Вспоминая определение тензорного произведения пространств, мы можем представить тензор $T(p, q)$ из $C(p, q)$ в виде формального полинома

$$T(p, q) = \sum_j x_j^1 \otimes \dots \otimes x_j^p \otimes \tilde{x}_k^1 \otimes \dots \otimes \tilde{x}_k^q, \quad (3.1.2)$$

где x_j^i — вектор из C , \tilde{x}_k^j — вектор из \tilde{C} , а индекс j служит для обозначения векторов, входящих в j -й член суммы (3.1.2).

Согласно определению § 2.3, скалярное произведение в $C(p, q)$ задается формулой

$$\left(\sum_i^1 x_i \otimes \dots \otimes x_i^p \otimes \tilde{x}_1^{i'} \otimes \dots \otimes \tilde{x}_q^{i'} \mid \sum_j^1 x_j'' \otimes \dots \otimes x_j''^p \otimes \right. \\ \left. \otimes \tilde{x}_1^{j''} \otimes \dots \otimes \tilde{x}_q^{j''} \right) = \sum_{i,j} \prod_{k=1}^p (x_i^k \mid x_j''^k) \prod_{l=1}^q (\tilde{x}_i^{i'} \mid \tilde{x}_j^{j''}). \quad (3.1.3)$$

Комментарии

1. Подчеркнем, в чем состоит *векторная природа* тензоров; это тем более необходимо, что в старых руководствах по тензорной алгебре тензоры обычно вводятся другим (эквивалентным) способом, при котором на передний план выдвигаются другие их свойства, о которых будет речь ниже.

Единственное, что существенно для того, чтобы некоторые объекты можно было трактовать как векторы, — это возможность производить над ними действия по определенным правилам, с соблюдением общих алгебраических законов, перечисленных в начале гл. 1. Поскольку $C(p, q)$ есть частный случай описанного выше тензорного произведения пространств, в котором такие правила действий были установлены, мы можем рассматривать формальные суммы (3.1.2) как векторы. При этом, правда, представление вектора суммой (3.1.2) неоднозначно; но суммы, представляющие один и тот же вектор, отличаются друг от друга лишь простыми преобразованиями типа (2.5.3), так что представление (3.1.2) очень удобно для изображения тензоров.

Отметим, что в литературе редко вводится для тензоров скалярное произведение; это одна из причин, по которым истолкование тензора как вектора некоторого комплексного евклидова пространства может показаться странным читателю, знакомому с тензорной алгеброй в ее «координатном» изложении.

«Векторная природа» тензоров имеет основное значение для интересующих нас физических приложений,

2. Векторы из $C(n)$ и ковекторы из $\tilde{C}(n)$ представляют частные случаи тензоров. В самом деле, $T(1,0)$ имеет вид $\sum_j \tilde{x}^j = \tilde{x}$, а $T(0,1)$ — вид $\sum_j \tilde{x}^j = \tilde{x}$.

Моном $T(1,1) = x \otimes \tilde{y}$ можно рассматривать как оператор на $C(n)$: действие этого оператора на вектор z из $C(n)$ определяется формулой

$$Tz = x \langle \tilde{y} | z \rangle = \langle \tilde{y} | z \rangle x.$$

Конечно, это не самый общий линейный оператор на $C(n)$; но *любой* такой оператор можно отождествить с некоторым полиномом, т. е. с тензором типа $T(1,1) = x_i \otimes \tilde{y}^i$:

$$Tz = \langle \tilde{y}^i | z \rangle x_i. \quad (3.1.4)$$

Итак, операторы в $C(n)$ представляют собой тензоры валентности $(1,1)$.

Моном $T(0,2) = \tilde{x}_1 \otimes \tilde{x}_2$ можно рассматривать как билинейную форму на $C(n)$; ее значение на паре векторов u, v определяется как

$$T(u, v) = \langle \tilde{x}_1 | u \rangle \cdot \langle \tilde{x}_2 | v \rangle.$$

Наиболее общая билинейная форма на $C(n)$ задается тензором

$$T(0,2) = \sum_j \tilde{x}_1^j \otimes \tilde{x}_2^j:$$

$$T(u, v) = \sum_j \langle \tilde{x}_1^j | u \rangle \cdot \langle \tilde{x}_2^j | v \rangle. \quad (3.1.5)$$

Итак, билинейные формы на $C(n)$ представляют собой тензоры валентности $(0,2)$.

§ 3.2. Задание тензора координатами

Как и вектор из $C(n)$, тензор любой валентности над $C(n)$ не требует для своего определения никаких координатных систем: это — инвариантный объект, что особенно ясно видно из формулы (3.1.2), определяющей тензор

как формальное выражение, составленное из векторов и ковекторов. Но если в пространстве $\mathcal{C}(p, q)$, векторами которого являются тензоры T валентности (p, q) , введен некоторый базис, то можно найти координаты T относительно этого базиса. Напомним, как строится базис тензорного произведения пространств из базисов пространств-множителей. Для этого надо, прежде всего, выбрать базис в каждом множителе; в нашем случае множители суть экземпляры $\mathcal{C}(n)$ или $\tilde{\mathcal{C}}(n)$. Фиксируем базис e_1, \dots, e_n в $\mathcal{C}(n)$ и дуальный базис $\tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^n$ в $\tilde{\mathcal{C}}(n)$; в пространстве \mathcal{C} — i -м экземпляре $\mathcal{C}(n)$ — возьмем в качестве базиса i -й экземпляр базиса $\mathcal{C}(n)$, состоящий из векторов e_1, \dots, e_n , и аналогично в $\tilde{\mathcal{C}}$ — k -й экземпляр базиса $\tilde{\mathcal{C}}(n)$, состоящий из векторов $\tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^n$. Тогда базисные векторы пространства $\mathcal{C}(p, q)$, образующие в $\mathcal{C}(p, q)$ ортонормированную систему, имеют вид

$$e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_p} \otimes \tilde{e}^{\beta_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{\beta_q}, \quad (3.2.1)$$

где индексы $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ пробегают независимо значения от 1 до n . Заметим, что было бы очень неудобно нумеровать векторы (3.2.1) при помощи одного индекса, хотя это можно было бы сделать, расположив их в последовательность по некоторому правилу (ср. (2.3.11)). Мы видели, однако, что уже для простейших вычислений с координатами удобнее «многоиндексная» система нумерации (ср. доказательство унитарности $M \otimes N$ в § 2.4).

Обозначим поэтому базисный вектор (или, что то же, базисный тензор) (3.2.1) через $\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}$. Тогда для любого монома

$$T_0 = x^1 \otimes x^2 \otimes \dots \otimes x^p \otimes \tilde{x}_1 \otimes \tilde{x}_2 \otimes \dots \otimes \tilde{x}_q \quad (3.2.2)$$

имеем

$$x = x^i e_j, \quad \tilde{x} = x_l \tilde{e}^k, \\ T_0 = x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} \dots x^{\alpha_p} \tilde{x}_{\beta_1} \tilde{x}_{\beta_2} \dots \tilde{x}_{\beta_q} \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}. \quad (3.2.3)$$

Любой тензор $T(p, q)$ имеет поэтому разложение вида

$$T(p, q) = T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}. \quad (3.2.4)$$

Числа $T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ и суть координаты тензора $T(p, q)$ в выбранном базисе (3.2.1).

Для векторов $T(1, 0)$ и ковекторов $T(0, 1)$ мы снова получаем их координаты в $C(n)$, соответственно, в $\bar{C}(n)$:

$$T(1, 0) = T^\alpha e_\alpha, \quad T(0, 1) = T_\beta \tilde{e}^\beta.$$

Для тензоров валентности $(1, 1)$ имеем

$$T(1, 1) = T_\beta^\alpha e_\alpha \otimes \tilde{e}^\beta.$$

Согласно (3.1.4) действие оператора $T(1, 1)$ на вектор $z = z^i e_i$ задается формулой

$$u = T(1, 1) z = T_\beta^\alpha \langle \tilde{e}^\beta | z \rangle e_\alpha = T_\beta^\alpha z^\beta e_\alpha,$$

или

$$u = T_\beta^\alpha z^\beta. \quad (3.2.5)$$

Мы возвращаемся к обычной записи оператора в координатах. В частности, тождественный оператор задается тензором δ , имеющим в любом базисе координаты δ_β^α .

Аналогично тензор

$$T(0, 2) = T_{\beta_1 \beta_2} \tilde{e}^{\beta_1} \otimes \tilde{e}^{\beta_2}$$

определяет, согласно (3.1.5), билинейную форму

$$T(u, v) = T_{\beta_1 \beta_2} u^{\beta_1} v^{\beta_2}. \quad (3.2.6)$$

Операции над тензорами одинаковой валентности записываются в координатах следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} (T + S)_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} &= T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} + S_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}, \\ (\lambda T)_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} &= \lambda \cdot T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}, \\ (T | S) &= \sum_{\alpha, \beta} \bar{T}_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} S_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.7)$$

(в последней формуле суммирование производится по всем индексам α_i ($i = 1, \dots, p$), β_j ($j = 1, \dots, q$)).

§ 3.3. Индуцированный оператор

Пусть в $C(n)$ действует оператор L ; тогда, как мы видели, в дуальном пространстве $\tilde{C}(n)$ определен дуальный оператор \tilde{L} . Возьмем в i -м экземпляре $C(n)$ (т. е. в C) оператор L — i -й экземпляр L , а в k -м экземпляре $\tilde{C}(n)$ (т. е. в \tilde{C}) — \tilde{L} , k -й экземпляр \tilde{L} . Тогда в $C(p, q)$ действует тензорное произведение операторов

$$\bar{L} = \overset{1}{L} \otimes \dots \otimes \overset{p}{L} \otimes \underset{1}{\tilde{L}} \otimes \dots \otimes \underset{q}{\tilde{L}}. \quad (3.3.1)$$

Прежде чем выяснять детальнее, как действует оператор \bar{L} , отметим формальный смысл только что проведенной конструкции: по данному оператору L , действующему на векторы x из $C(n)$, мы построили стандартным образом оператор \bar{L} , действующий на векторы $T(p, q)$ из пространства $C(p, q)$. Этот закон соответствия, по которому оператору в n -мерном пространстве ставится в соответствие оператор в пространстве другой, вообще говоря, более высокой размерности, имеет основное значение для теории представлений, развиваемой ниже.

Обозначим это соответствие символом Π :

$$\bar{L} = \Pi L. \quad (3.3.2)$$

\bar{L} называется оператором, индуцированным L в $C(p, q)$.

Посмотрим теперь подробнее, как действует оператор \bar{L} на вектор $T(p, q)$. Поскольку \bar{L} линеен, достаточно рассмотреть, как \bar{L} действует на базисные векторы (3.2.1); по определению тензорного произведения операторов (2.5.5) \bar{L} действует «почленно»:

$$\begin{aligned} \bar{L}(e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_p} \otimes \underset{1}{\tilde{e}^{\beta_1}} \otimes \dots \otimes \underset{q}{\tilde{e}^{\beta_q}}) = \\ = \overset{1}{L}(e_{\alpha_1}) \otimes \dots \otimes \overset{p}{L}(e_{\alpha_p}) \otimes \underset{1}{\tilde{L}}(\tilde{e}^{\beta_1}) \otimes \dots \otimes \underset{q}{\tilde{L}}(\tilde{e}^{\beta_q}). \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Но в выбранных базисах имеем (см. (2.1.10)):

$$\overset{i}{L}e_{\alpha} = L_{\alpha}^{\gamma} e_{\gamma}, \quad \overset{i}{L}\xi^{\beta} = \overset{\beta}{L}_{\delta}^{\xi} \xi^{\delta}, \quad (3.3.4)$$

поскольку все операторы $\overset{i}{L}$ имеют одну и ту же матрицу L_{α}^{γ} , а все операторы $\overset{i}{L}$ — одну и ту же матрицу $\overset{\beta}{L}_{\delta}^{\xi}$. Поэтому

$$\overline{L}(\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}) = L_{\alpha_1}^{\gamma_1} L_{\alpha_2}^{\gamma_2} \dots L_{\alpha_p}^{\gamma_p} \overset{\beta_1}{L}_{\delta_1} \dots \overset{\beta_q}{L}_{\delta_q} \Psi_{\gamma_1 \dots \gamma_p}^{\delta_1 \dots \delta_q}, \quad (3.3.5)$$

и мы нашли матричные элементы оператора \overline{L} в базисе (3.2.1). В силу общего выражения для линейного оператора в координатах (1.2.3), мы можем теперь записать уравнение

$$T' = \overline{L}T \quad (3.3.6)$$

в координатной форме:

$$T'_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = L_{\gamma_1}^{\alpha_1} \dots L_{\gamma_p}^{\alpha_p} \overset{\delta_1}{L}_{\beta_1} \dots \overset{\delta_q}{L}_{\beta_q} T_{\delta_1 \dots \delta_q}^{\gamma_1 \dots \gamma_p}. \quad (3.3.7)$$

Согласно (2.1.12) то же можно записать в виде

$$T'_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = L_{\gamma_1}^{\alpha_1} \dots L_{\gamma_p}^{\alpha_p} (L^{-1})_{\beta_1}^{\delta_1} \dots (L^{-1})_{\beta_q}^{\delta_q} T_{\delta_1 \dots \delta_q}^{\gamma_1 \dots \gamma_p}. \quad (3.3.8)$$

Если $L = U$ — унитарный оператор, действующий в $C(n)$ (случай, нужный нам в дальнейшем), то можно записать (3.3.8) в двух видах (см. (1.2.17)):

$$\left. \begin{aligned} T'_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} &= U_{\gamma_1}^{\alpha_1} \dots U_{\gamma_p}^{\alpha_p} (U^{-1})_{\beta_1}^{\delta_1} \dots (U^{-1})_{\beta_q}^{\delta_q} T_{\delta_1 \dots \delta_q}^{\gamma_1 \dots \gamma_p}, \\ T'_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} &= \sum_{\gamma, \delta} U_{\gamma_1}^{\alpha_1} \dots U_{\gamma_p}^{\alpha_p} \overline{U}_{\delta_1}^{\beta_1} \dots \overline{U}_{\delta_q}^{\beta_q} T_{\delta_1 \dots \delta_q}^{\gamma_1 \dots \gamma_p}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.9)$$

«Неудачный» вид второй формулы (3.3.9) (суммирование не по правилу Эйнштейна) связан с тем, что операция перехода от матрицы к комплексно сопряженной матрице не имеет инвариантного (не зависящего от выбора базиса) смысла.

Подчеркнем еще раз, что формула (3.3.8) представляет собой запись в координатах действия в пространстве $C(p, q)$ оператора \bar{L} , индуцированного действующим в $C(n)$ оператором L . Матрица оператора \bar{L} есть квадратная матрица порядка n^{p+q} . Можно занумеровать базисные векторы $\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}$ некоторым стандартным способом. Например, условимся считать, что система чисел $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_p)$ предшествует $(\alpha''_1, \dots, \alpha''_p)$, если для некоторого j будет

$$\alpha'_i = \alpha''_i \quad (i \leq j - 1), \quad \text{но} \quad \alpha'_j < \alpha''_j;$$

аналогично упорядочим системы $(\beta_1, \dots, \beta_q)$. Тогда можно считать, что вектор $\Psi_{\alpha'_1 \dots \alpha'_p}^{\beta'_1 \dots \beta'_q}$ предшествует $\Psi_{\alpha''_1 \dots \alpha''_p}^{\beta''_1 \dots \beta''_q}$, если либо система $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_p)$ предшествует системе $(\alpha''_1, \dots, \alpha''_p)$, либо обе системы совпадают, но система $(\beta'_1, \dots, \beta'_q)$ предшествует системе $(\beta''_1, \dots, \beta''_q)$. Тогда в (3.3.5) упорядочены последовательности «строчных индексов» $(\gamma_1 \dots \gamma_p \delta_1 \dots \delta_q)$ и «столбцовых индексов» $(\alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1 \dots \beta_q)$ (ср. с формулой (1.2.2)!).

Теперь уже нетрудно расположить числа

$$L_{\alpha_1}^{\gamma_1} \dots L_{\alpha_p}^{\gamma_p} \bar{L}_{\delta_1}^{\beta_1} \dots \bar{L}_{\delta_q}^{\beta_q}$$

в квадратную таблицу — матрицу оператора \bar{L} в базисе (3.2.1). Мы не пытаемся изобразить такую таблицу в общем случае; в случае $p = 2, q = 0$ она имеет вид (2.4.2), с $m = n$ и $M = N = L$.

Докажем теперь следующее свойство соответствия Π : если операторы L', L'' действуют в $C(n)$, $L = L' L''$ и L', L'', L индуцируют операторы $\bar{L}', \bar{L}'', \bar{L}$, действующие в $C(p, q)$, то $\bar{L} = \bar{L}' \bar{L}''$; или, иными словами,

$$\Pi(L' L'') = \Pi(L') \cdot \Pi(L''). \quad (3.3.10)$$

Достаточно проверить, что \bar{L} и $\bar{L}' \bar{L}''$ одинаково действуют на базисные векторы (3.2.1); согласно определению

тензорного произведения операторов (2.5.5),

$$\begin{aligned} \bar{L}(\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}) &= \bar{L}(e_{\alpha_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{\alpha_p}^p \otimes \underset{1}{\tilde{e}^{\beta_1}} \otimes \dots \otimes \underset{q}{\tilde{e}^{\beta_q}}) = \\ &= \overset{1}{L}(e_{\alpha_1}) \otimes \dots \otimes \overset{p}{L}(e_{\alpha_p}) \otimes \underset{1}{\bar{L}}(\underset{1}{\tilde{e}^{\beta_1}}) \otimes \dots \otimes \underset{q}{\bar{L}}(\underset{q}{\tilde{e}^{\beta_q}}) = \\ &= \overset{1}{L}'\overset{1}{L}''(e_{\alpha_1}) \otimes \dots \otimes \overset{p}{L}'\overset{p}{L}''(e_{\alpha_p}) \otimes \underset{1}{\bar{L}}'\underset{1}{\bar{L}}''(\underset{1}{\tilde{e}^{\beta_1}}) \otimes \dots \otimes \underset{q}{\bar{L}}'\underset{q}{\bar{L}}''(\underset{q}{\tilde{e}^{\beta_q}}) = \\ &= \bar{L}'\bar{L}''(\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}). \end{aligned}$$

Можно доказать (3.3.10) также вычислением матричных элементов $\bar{L}'\bar{L}''$; при этом надо принять во внимание, что оператор, дуальный $L'L''$, есть $\tilde{L}'\tilde{L}'$, а действие дуального оператора описывается в координатах формулой (2.1.12).

Далее, ясно, что единичному оператору $\epsilon(n)$ соответствует единичный оператор:

$$\Pi(\epsilon(n)) = \epsilon(n^{p+q}). \quad (3.3.11)$$

Покажем, что если U — унитарный оператор в $C(n)$, то и индуцированный оператор $\bar{U} = \Pi U$ унитарен в $C(p, q)$. Достаточно доказать равенство

$$(\bar{U}T | \bar{U}S) = (T | S) \quad (3.3.12)$$

для случая, когда T, S — базисные векторы (3.2.1). Но согласно определению (3.3.3)

$$\bar{U}T = \bar{U}\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} = \overset{1}{U}e_{\alpha_1}^1 \otimes \dots \otimes \overset{p}{U}e_{\alpha_p}^p \otimes \underset{1}{U}\underset{1}{\tilde{e}^{\beta_1}} \otimes \dots \otimes \underset{q}{U}\underset{q}{\tilde{e}^{\beta_q}},$$

$$\bar{U}S = \bar{U}\Psi_{\sigma_1 \dots \sigma_p}^{\tau_1 \dots \tau_q} = \overset{1}{U}e_{\sigma_1}^1 \otimes \dots \otimes \overset{p}{U}e_{\sigma_p}^p \otimes \underset{1}{U}\underset{1}{\tilde{e}^{\tau_1}} \otimes \dots \otimes \underset{q}{U}\underset{q}{\tilde{e}^{\tau_q}}.$$

По определению скалярного произведения в $C(p, q)$

(см. (2.3.8), (3.1.3))

$$(\bar{U}T | \bar{U}S) =$$

$$= (Ue_{\alpha_1} | Ue_{\sigma_1}) \dots (Ue_{\alpha_p} | Ue_{\sigma_p}) (\bar{U}\bar{e}^{\beta_1} | \bar{U}\bar{e}^{\tau_1}) \dots (\bar{U}\bar{e}^{\beta_q} | \bar{U}\bar{e}^{\tau_q}).$$

Наконец, оператор, дуальный U , унитарен в $\bar{C}(n)$, как было доказано в § 2.1; поэтому

$$(Ue_{\alpha} | Ue_{\sigma}) = (e_{\alpha} | e_{\sigma}), \quad (\bar{U}\bar{e}^{\beta} | \bar{U}\bar{e}^{\tau}) = (\bar{e}^{\beta} | \bar{e}^{\tau})$$

и (3.3.12) доказано.

§ 3.4. Другие способы определения тензора

А. Тензор как закон преобразования

Мы видели, что тензор $T(p, q)$ в произвольном базисе имеет координаты $T_{\delta_1 \dots \delta_q}^{\gamma_1 \dots \gamma_p}$:

$$T(p, q) = T_{\delta_1 \dots \delta_q}^{\gamma_1 \dots \gamma_p} \Psi_{\gamma_1 \dots \gamma_p}^{\delta_1 \dots \delta_q}. \quad (3.4.1)$$

Напомним, что базис в $C(p, q)$ был получен с помощью указанного в § 3.2 стандартного построения из заданного базиса e_1, \dots, e_n в $C(n)$ (ср. (3.2.1)). Таким образом, можно считать, что система из n^{p+q} чисел $T_{\delta_1 \dots \delta_q}^{\gamma_1 \dots \gamma_p}$ однозначно соответствует выбранному базису e в $C(n)$.

Если теперь выбрать в $C(n)$ новый базис e'_1, \dots, e'_n , то по нему в $C(p, q)$ строится новый базис

$$\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} = e'_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e'_{\alpha_p} \otimes \underset{1}{e}^{\beta_1} \otimes \dots \otimes \underset{q}{e}^{\beta_q} \quad (3.4.2)$$

в пространстве $C(p, q)$. Разлагая тот же тензор $T(p, q)$ по базису (3.4.2), имеем

$$T(p, q) = T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}. \quad (3.4.3)$$

Можно получить базис e из базиса e' действием некоторого унитарного оператора U в $C(n)$:

$$Ue'_i = e_i. \quad (3.4.4)$$

Тогда

$$e_i = U_i^j e'_j \quad (3.4.5)$$

(ср. (1.2.2)).

В силу (2.1.10), (2.1.12)

$$\bar{e}^k = (U^{-1})_j^k \bar{e}'^j. \quad (3.4.6)$$

Подставляя выражения (3.4.5), (3.4.6) в (3.2.1), получаем:

$$\Psi_{\gamma_1 \dots \gamma_p}^{\delta_1 \dots \delta_q} = U_{\gamma_1}^{\alpha_1} \dots U_{\gamma_p}^{\alpha_p} (U^{-1})_{\beta_1}^{\delta_1} \dots (U^{-1})_{\beta_q}^{\delta_q} \Psi'_{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}^{\beta_1 \dots \beta_q}. \quad (3.4.7)$$

Подставляя теперь правую часть (3.4.7) в (3.4.1) и сравнивая коэффициенты при соответствующих базисных векторах (ср. (3.4.3)), найдем выражение «новых» координат тензора $T(p, q)$ через «старые»:

$$T'_{\beta_1 \dots \beta_q}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = U_{\gamma_1}^{\alpha_1} \dots U_{\gamma_p}^{\alpha_p} (U^{-1})_{\beta_1}^{\delta_1} \dots (U^{-1})_{\beta_q}^{\delta_q} T_{\delta_1 \dots \delta_q}{}^{\gamma_1 \dots \gamma_p}. \quad (3.4.8)$$

(3.4.8) имеет *формальное* сходство с (3.3.9), но смысл этих формул совершенно различен: (3.3.9) выражает координаты тензора T' через координаты в том же базисе *другого* тензора T , из которого T' получается действием оператора \bar{U} , тогда как (3.4.8) выражает координаты тензора T в новом базисе через координаты *того же* тензора в старом базисе пространства $C(p, q)$.

Пусть теперь (отвлекаясь от всего, что мы знаем о пространствах $C(p, q)$) *каждому базису в $C(n)$ поставлена в соответствие некоторая система из n^{p+q} чисел $T_{\beta_1 \dots \beta_q}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$, причем закон соответствия таков, что системы чисел, соответствующие разным базисам, связаны соотношениями (3.4.8).*

Тогда, как можно показать, существует один, и только один, тензор $T(p, q)$ из пространства $C(p, q)$, имеющий в каждом базисе координаты, равные заданным числам $T_{\beta_1 \dots \beta_q}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$. Поэтому можно было бы определить тензор как закон соответствия $e \rightarrow T_{\beta_1 \dots \beta_q}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$, обладающий свойством (3.4.8). Такое определение, выдвигающее на передний план закон преобразования координат, неудобно для

излагаемой дальше теории, где, например, важно знать собственные значения некоторых операторов на пространстве тензоров $C(p, q)$. Ясно, что при этом надо, прежде всего, представлять себе тензор как элемент векторного пространства $C(p, q)$. Такая точка зрения и принята в этой книге.

Б. Тензор как полилинейная функция

Другой способ определения тензора основан на следующем замечании. Пусть задан произвольный набор из p ковекторов и q векторов

$$\xi = (\underset{1}{\tilde{y}}, \dots, \underset{p}{\tilde{y}}, \underset{1}{y}, \dots, \underset{q}{y}).$$

Тогда можно для тензора $T(p, q)$ (3.1.2) определить значение на ξ по формуле

$$T(\xi) = \sum_j \langle \underset{1}{\tilde{y}} | \underset{1}{x_j} \rangle \dots \langle \underset{p}{\tilde{y}} | \underset{p}{x_j} \rangle \langle \underset{1}{\tilde{x}^j} | \underset{1}{y} \rangle \dots \langle \underset{q}{\tilde{x}^j} | \underset{q}{y} \rangle. \quad (3.4.9)$$

Если закрепить все аргументы \tilde{y}, y кроме одного, то получаем функцию с комплексными значениями от ковектора или вектора, и все такие функции *линейны*.

Пусть теперь задана произвольная функция

$$T(\xi) = T(\underset{1}{\tilde{y}}, \dots, \underset{p}{\tilde{y}}, \underset{1}{y}, \dots, \underset{q}{y}) \quad (3.4.10)$$

от p ковекторов и q векторов, линейная по отношению к каждому аргументу при закрепленных остальных (такая функция называется *полилинейной*). Тогда, как можно показать, существует один, и только один, тензор $T(p, q)$, определяющий $T(\xi)$ по формуле (3.4.9). Поэтому можно было бы определить тензор как полилинейную функцию вида (3.4.10). Однако принятое в начале этой главы определение имеет то преимущество, что позволяет использовать алгебраические навыки работы с произведениями и суммами.

Кроме того, формулы вида (3.1.2) позволяют особенно наглядно описать прием составления сложных частиц из более простых (ср. главу 12).

§ 3.5. Умножение и свертывание тензоров

Мы определим теперь операции над тензорами, меняющие их валентность. Пусть даны тензоры $T(p, q)$ и $T(r, s)$:

$$\left. \begin{aligned} T(p, q) &= \sum_j^1 x_j \otimes \dots \otimes x_j \otimes \tilde{x}_1^j \otimes \dots \otimes \tilde{x}_q^j, \\ T(r, s) &= \sum_k^1 y_k \otimes \dots \otimes y_k \otimes \tilde{y}_1^k \otimes \dots \otimes \tilde{y}_s^k, \end{aligned} \right\} \quad (3.5.1)$$

где x_j, y_k — векторы пространства $C(n)$, а $\tilde{x}_i^j, \tilde{y}_i^k$ — ко-векторы дуального пространства $\tilde{C}(n)$. Поставим этим тензорам в соответствие тензор $T(p+r, q+s)$, называемый их *произведением*:

$$\begin{aligned} T(p+r, q+s) &= T(p, q) \otimes T(r, s) = \\ &= \sum_{j,k}^1 x_j \otimes \dots \otimes x_j \otimes y_k \otimes \dots \otimes y_k \otimes \\ &\quad \otimes \tilde{x}_1^j \otimes \dots \otimes \tilde{x}_q^j \otimes \tilde{y}_1^k \otimes \dots \otimes \tilde{y}_s^k. \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Существенно, что в отличие от сложения тензоров и умножения их на число, которые производятся в *одном и том же* пространстве тензоров данной валентности, умножение тензоров есть операция над тензорами из *разных* пространств. $T(p, q)$ принадлежит пространству $C(p, q)$, $T(r, s)$ — пространству $C(r, s)$, а произведение их $T(p+r, q+s)$ — пространству $C(p+r, q+s)$. Далее, хотя произведения $T(p, q) \otimes T(r, s)$ и $T(r, s) \otimes T(p, q)$ имеют одинаковую валентность, эти произведения, вообще говоря, различны; это видно уже в случае, когда перемножаются два вектора x, y , так как тензоры $x \otimes y$ и $y \otimes x$ при неколлинеарных x, y не совпадают. Итак, *умножение тензоров не коммутативно* (ср. с умножением операторов). Однако свойства ассоциативности и дистрибутивности, как легко проверить, справедливы:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 \otimes T_2) \otimes T_3 &= T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3), \\ T \otimes (T_1 + T_2) &= T \otimes T_1 + T \otimes T_2, \\ (\lambda T_1) \otimes T_2 &= T_1 \otimes (\lambda T_2) = \lambda (T_1 \otimes T_2). \end{aligned} \right\} \quad (3.5.3)$$

Заметим, что, в силу формулы (3.5.2), пространство $C(p+r, q+s)$ оказывается тензорным (кронеккеревым) произведением пространств $C(p, q)$, $C(r, s)$ (см. § 2.3):

$$C(p+r, q+s) = C(p, q) \otimes C(r, s). \quad (3.5.4)$$

Как мы знаем, это не означает, что *каждый* тензор $T(p+r, q+s)$ представим в виде произведения тензоров $T(p, q)$, $T(r, s)$, но *каждый* тензор $T(p+r, q+s)$ *есть* сумма таких произведений.

В частности, *каждый* тензор может быть получен из векторов и ковекторов с помощью сложения и умножения.

Разлагая сомножители по соответствующим базисам (3.2.1), получаем простое выражение координат произведения через координаты сомножителей:

$$\text{если } T = T' \otimes T'',$$

то

$$T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = T'_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \cdot T''_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}. \quad (3.5.5)$$

Определим теперь другую операцию, ставящую в соответствие каждому тензору $T(p, q)$ (см. (3.5.1)) тензор $T(p-1, q-1)$ (предполагая, конечно, что $p \geq 1$, $q \geq 1$). Фиксируем некоторые номера i и k , $1 \leq i \leq p$, $1 \leq k \leq q$, и положим

$$\begin{aligned} T(p-1, q-1) &= \text{Sp}_k^i T(p, q) = \\ &= \sum_j \langle \tilde{x}^j | x_j \rangle x_j \otimes \dots \otimes x_j \otimes x_j \otimes \dots \otimes x_j \otimes \\ &\quad \otimes \tilde{x}^j \otimes \dots \otimes \tilde{x}^j \otimes \tilde{x}^j \otimes \dots \otimes \tilde{x}^j. \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Как легко видеть, Sp_k^i есть *линейное* отображение пространства $C(p, q)$ в пространство $C(p-1, q-1)$. Поэтому для любого

$$T(p, q) = T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}$$

имеем

$$\begin{aligned} T(p-1, q-1) &= T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \text{Sp}_k^i e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_i} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_p} \otimes \\ &\quad \otimes \tilde{e}^{\beta_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{\beta_k} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{\beta_q} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \delta_{\alpha_i}^{\beta_k} e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_{i-1}} \otimes e_{\alpha_{i+1}} \otimes \dots \otimes \\
 &\quad \otimes \tilde{e}^{\beta_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{\beta_{k-1}} \otimes \tilde{e}^{\beta_{k+1}} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{\beta_q} = \\
 &= T_{\beta_1 \dots \beta_{k-1} \sigma \beta_{k+1} \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \sigma \alpha_{i+1} \dots \alpha_p} e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_{i-1}} \otimes e_{\alpha_{i+1}} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_p} \otimes \\
 &\quad \otimes \tilde{e}^{\beta_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{\beta_{k-1}} \otimes \tilde{e}^{\beta_k} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{\beta_q}, \quad (3.5.7)
 \end{aligned}$$

где в правой части производится суммирование по σ , согласно правилу Эйнштейна. Операция Sp_k^i называется *свертыванием*.

Таким образом, координаты свернутого тензора $T^s = T(p-1, q-1)$ выражаются через координаты тензора $T(p, q)$ по формуле

$$T_{\beta_1 \dots \beta_{k-1} \sigma \beta_{k+1} \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \sigma \alpha_{i+1} \dots \alpha_p} = \delta_{\alpha_i}^{\beta_k} T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = T_{\beta_1 \dots \beta_{k-1} \sigma \beta_{k+1} \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \sigma \alpha_{i+1} \dots \alpha_p}. \quad (3.5.8)$$

§ 3.6. Симметрические и антисимметрические тензоры

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые классы тензоров, характеризующиеся их свойствами симметрии.

Тензор $T(p, 0)$ имеет вид

$$\sum_j^1 x_j \otimes \sum_j^2 x_j \otimes \dots \otimes \sum_j^p x_j, \quad (3.6.1)$$

где x_j — векторы пространства $C(n)$.

Каждой подстановке p чисел

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} \quad (3.6.2)$$

соответствует операция над тензорами, сопоставляющая $T(p, 0)$ тензор

$$sT(p, 0) = \sum_j^{k_1} x_j \otimes \sum_j^{k_2} x_j \otimes \dots \otimes \sum_j^{k_p} x_j, \quad (3.6.3)$$

где k_i — число, расположенное над i в схеме (3.6.2).

Легко проверить, что операция s не зависит от способа записи тензора в виде (3.6.1) (ср. § 3.1).

Далее, очевидно, что s есть линейный оператор на пространстве $C(p, 0)$.

Посмотрим, как связаны координаты тензоров T и sT . Для этого удобно разложить T по базису (3.2.1) и применить оператор s к обеим частям полученного равенства. Чтобы сформулировать результат, введем следующее обозначение. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ — некоторая последовательность индексов, $s(i)$ — число, расположенное под i в схеме (3.6.2). Обозначим через $s(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ последовательность индексов $\alpha_{s(1)}, \alpha_{s(2)}, \dots, \alpha_{s(p)}$. Таким образом, индексы меняются местами, но состав индексов в последовательности остается прежним; если, например,

$$p = 3, \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

то $s(112) = 121$ (но не 223!).

В этих обозначениях можно выразить координаты тензора sT через координаты T формулой

$$(sT)^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = T^{s(\alpha_1 \dots \alpha_p)}. \quad (3.6.4)$$

(Теперь ясно, почему мы воспользовались в определении (3.6.3) подстановкой s^{-1} вместо s : иначе нам пришлось бы производить обратную подстановку над индексами в (3.6.4), что затруднило бы работу с тензорами в координатной форме.)

Симметрические тензоры. Тензор называется *симметрическим*, если для любой подстановки s

$$sT = T. \quad (3.6.5)$$

В координатах условие симметричности выражается равенством

$$T^{s(\alpha_1 \dots \alpha_p)} = T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}, \quad (3.6.6)$$

откуда следует, что значение координаты тензора $T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ зависит только от *состава* последовательности индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, но не от их порядка.

Симметрические тензоры удобно задавать с помощью *чисел заполнения*. Пусть последовательность $\alpha_1 \dots \alpha_p$

содержит p_1 индексов, равных 1, p_2 индексов, равных 2, ...
..., p_n индексов, равных n ; очевидно,

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = p, \quad 0 \leq p_i \leq p \quad (3.6.7)$$

$$(i = 1, \dots, n).$$

Тогда общее значение всех координат симметрического тензора T , у которых p_1 индексов равны 1, ..., p_n индексов равны n , обозначается через T^{p_1, p_2, \dots, p_n} :

$$T^{p_1, \dots, p_n} = T^{x_1, \dots, x_p}. \quad (3.6.8)$$

Числа T^{p_1, \dots, p_n} называются числами заполнения тензора T ; при обозначении их, в отличие от обычных координат, существенны запяты между индексами.

С помощью чисел заполнения легко определить размерность $d_{p,n}$ пространства $\text{Sym}_n(p, 0)$ всех симметрических тензоров валентности $(p, 0)$ над пространством $C(n)$. Эта размерность равна числу чисел заполнения, необходимых для задания такого тензора, так как эти числа служат независимыми координатами в пространстве $\text{Sym}_n(p, 0)$.

Итак, надо найти число целочисленных решений уравнения (3.6.7). Решения эти можно наглядно изобразить с помощью расположений p шаров и $n - 1$ перегородок; именно, числам p_1, \dots, p_n , удовлетворяющим (3.6.7), поставим в соответствие ряд предметов, состоящий из p_1 шаров ($p_1 \geq 0$), затем одной перегородки, затем p_2 шаров, затем еще одной перегородки, и т. д., наконец, из p_{n-1} шаров, перегородки и p_n шаров. Всего используется при этом $p + n - 1$ предметов, и решений уравнения (3.6.7) столько, сколько есть способов расставить перегородки на $n - 1$ место из $p + n - 1$ возможных. Итак,

$$d_{p,n} = C_{n-1+p}^{n-1}. \quad (3.6.9)$$

В частности, при $n = 2$

$$d_{p,2} = n + 1. \quad (3.6.10)$$

В следующей таблице приведены значения $d_{p,n}$ для некоторых n, p .

$n \backslash p$	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	6	10	15	21	28
4	10	20	35	56	84
5	15	35	70	126	210
6	21	56	126	252	462

(3.6.11)

Бисимметрические тензоры. Тензор $T(p, q)$ называется *бисимметрическим*, если для любых подстановок

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & q \\ j_1 & j_2 & \dots & j_q \end{pmatrix} \quad (3.6.12)$$

координаты $T(p, q)$ удовлетворяют равенству

$$T_{t(\beta_1 \dots \beta_q)}^{s(\alpha_1 \dots \alpha_p)} = T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}. \quad (3.6.13)$$

Бисимметрический тензор может быть задан своими числами заполнения

$$T_{q_1, \dots, q_n}^{p_1, \dots, p_n}, \quad (3.6.14)$$

где p_1 — число верхних индексов, равных единице, ..., q_n — число нижних индексов, равных n . Размерность пространства таких тензоров равна

$$d_{p,n} \cdot d_{q,n} = C_{n-1+p}^{n-1} \cdot C_{n-1+q}^{n-1}. \quad (3.6.15)$$

Антисимметрические тензоры. Тензор (3.6.1) называется *антисимметрическим*, если для любой подстановки s

$$sT(p, 0) = \text{Sgn } s \cdot T(p, 0), \quad (3.6.16)$$

где $\text{Sgn } s$ равен 1 для четной подстановки s и равен -1 для нечетной. Это значит, что координаты тензора меняют знак при перестановке любых двух индексов; в частности, если в наборе индексов некоторой координаты есть два равных индекса, то эта координата равна нулю. Все антисимметрические тензоры типа $T(p, 0)$ над пространством $C(n)$ образуют пространство, которое мы обозначим через $A_{\text{sym}}(p, 0)$. Размерность этого пространства $\bar{d}_{p,n}$ равна числу независимых координат, задающих принадле-

жащий ему тензор. Ясно, что соответствующие наборы индексов не должны содержать повторяющихся чисел, порядок же индексов в таком наборе при подсчете *независимых* координат не учитывается. Поэтому

$$\bar{d}_{p,n} = C_n^p \quad (p \leq n). \quad (3.6.17)$$

При $p > n$ не существует ненулевых антисимметрических тензоров $T(p, 0)$ над $C(n)$.

Операторы симметризации. Построение симметрических и антисимметрических тензоров можно описать геометрически с помощью *оператора симметризации*

$$\mathbf{S} = \frac{1}{s!} \sum_s \quad (3.6.18)$$

и *оператора антисимметризации*

$$\mathbf{A} = \frac{1}{s!} \sum (-1)^{\text{Sgn } s_s}, \quad (3.6.19)$$

где $\text{Sgn } s$ равно 1 или -1 в зависимости от того, четна или нечетна подстановка s , а суммирование производится по всем подстановкам чисел $(1, 2, \dots, n)$.

Как легко видеть, каждый из операторов s унитарен.

Далее, легко проверить, что операторы \mathbf{S}, \mathbf{A} эрмитовы и что $\mathbf{S}^2 = \mathbf{S}, \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. Согласно (1.2.25), \mathbf{S} и \mathbf{A} являются *операторами проектирования*, которые проектируют пространство $C(p, 0)$ на подпространство всех симметрических, соответственно, антисимметрических тензоров. При этом симметрические тензоры могут быть определены как тензоры, инвариантные по отношению к оператору \mathbf{S} :

$$\mathbf{S}T = T, \quad (3.6.20)$$

и аналогично антисимметрические тензоры могут быть определены равенством

$$\mathbf{A}T = T. \quad (3.6.21)$$

В главе 5 мы изучим более общие типы симметрии тензоров и соответствующие операторы проектирования.

ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ

§ 4.1. Группы. Определения и простейшие свойства

В физике играют важную роль некоторые системы операторов, называемые *группами*. Система операторов G в $C(n)$ (n произвольно, но фиксировано) называется группой, если G обладает следующими свойствами:

1. Произведение двух операторов из G есть снова оператор из G .
2. Тожественный (единичный) оператор $\epsilon(n)$ принадлежит G .
3. Для каждого оператора U из G существует обратный оператор U^{-1} , и этот обратный оператор принадлежит G .

(4.1.1)

Назовем оператор, имеющий обратный, *обратимым*; можно показать, что если оператор U имеет обратный оператор, то этот последний определяется единственным образом. В самом деле, пусть U имеет обратный оператор U^{-1} ; это значит, что

$$U^{-1}U = \epsilon(n), \quad (4.1.2)$$

или, что то же:

$$\text{если } Ux = y, \text{ то } U^{-1}y = x. \quad (4.1.3)$$

Правило (4.1.3) однозначно определяет обратный оператор.

Для обратного оператора справедливо также равенство

$$UU^{-1} = \epsilon(n), \quad (4.1.4)$$

или, что то же:

$$\text{если } U^{-1}y = x, \text{ то } Ux = y. \quad (4.1.5)$$

Нетрудно видеть, что

$$(UV)(V^{-1}U^{-1}) = U(VV^{-1})U^{-1} = U\epsilon(n)U^{-1} = \\ = UU^{-1} = \epsilon(n),$$

откуда следует важное правило обращения произведения:

$$(UV)^{-1} = V^{-1}U^{-1}. \quad (4.1.6)$$

Вообще говоря, произведение операторов не коммутативно: $UV \neq VU$. Если $UV = VU$, то говорят, что операторы U и V *коммутируют*. Так, для любого U будет $\epsilon(n)U = U\epsilon(n)$, так что $\epsilon(n)$ коммутирует со всеми операторами; кратное тождественного оператора $\lambda\epsilon(n)$ при любом комплексном λ также коммутирует со всеми операторами в $C(n)$. Можно показать, что никакой другой оператор, кроме $\lambda\epsilon(n)$, не обладает таким свойством. Далее, U всегда коммутирует с U^{-1} , как видно из (4.1.2) и (4.1.4).

Если *все* операторы G коммутируют друг с другом, то G называется *коммутативной*, или абелевой, группой. Если группа H составляет подмножество группы G , то H называется *подгруппой* G .

Аналогично определяются группы операторов в гильбертовом пространстве.

Группы в матричной форме. Выберем в $C(n)$ некоторый базис $\{e_i\}$; тогда, как мы знаем (§ 1.2), каждый оператор, в том числе и оператор из G , имеет изображающую его матрицу $U_e = (U_j^i)$. Смысл матричного изображения операторов состоит в том, что уравнение

$$Ux = y$$

записывается в координатах в виде

$$y^i = U^i_j x^j.$$

При этом произведение операторов изображается в базисе $\{e\}$ матрицей, получаемой умножением в том же порядке матриц, изображающих сомножители:

$$(UV)_e = U_e V_e. \quad (4.1.7)$$

Поскольку различные операторы изображаются разными матрицами, можно заменить каждый оператор G его

матрицей; тождественный оператор заменяется при этом единичной матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1.8)$$

и обратные операторы — обратными матрицами; тогда можно вместо группы операторов G рассматривать соответствующую ей группу $(n \times n)$ -матриц с комплексными элементами. Такая точка зрения часто встречается в литературе; не следует, однако, забывать, что в другом базисе $\{e^i\}$ операторы из G будут изображаться другими матрицами, и замена «операторной группы» «матричной группой» возможна лишь в тех построениях, где пользуются с начала до конца одним фиксированным базисом. Матричное изображение дает возможность ввести в группах *независимые параметры*.

Все обратимые операторы в $C(n)$ образуют группу; в самом деле, произведение обратимых операторов UV имеет обратный оператор $V^{-1}U^{-1}$ (см. (4.1.5)), который также обратим, поскольку $(V^{-1}U^{-1})^{-1} = UV$; тождественный оператор $\epsilon(n)$ обратим ($\epsilon(n)^{-1} = \epsilon(n)$); свойство 3 в (4.1.1) также выполнено, так как каждый обратимый оператор U имеет обратный U^{-1} , который обратим ($(U^{-1})^{-1} = U$). Обозначим группу всех обратимых операторов в $C(n)$ через $GL(n, C)$. Все группы операторов в $C(n)$ являются, очевидно, подгруппами $GL(n, C)$. Изобразим $GL(n, C)$ матрицами, как указано выше; тогда $GL(n, C)$ состоит из всех комплексных n -рядных обратимых матриц, т. е. матриц с ненулевым определителем.

Дискретные группы и группы Ли. По определению, любая группа G является подгруппой $GL(n, C)$ при некотором n . Группы делятся на два основных класса — дискретные и непрерывные.

Пусть U — оператор из $GL(n, C)$. Выберем базис $\{e^i\}$ в $C(n)$; тогда U имеет в этом базисе матрицу U_e . Для любого положительного ϵ множество всех операторов V , все матричные элементы которых удовлетворяют

неравенствам

$$|(V_e)_i^j - (U_e)_i^j| < \varepsilon, \quad (4.1.9)$$

образуют ε -окрестность оператора U .

Если каждый оператор U из группы G имеет ε -окрестность, не содержащую других операторов из G , то группа G называется *дискретной*; при этом ε может быть для каждого U выбрано отдельно.

Таким образом, операторы дискретной группы расположены в $GL(n, C)$ изолированно. Можно показать, что операторы дискретной группы можно занумеровать конечным числом натуральных чисел или всем рядом натуральных чисел; в первом случае группа называется *конечной*. Все другие группы *бесконечны*.

Группа G называется *непрерывной группой*, или *группой Ли*, если каждый ее оператор U имеет ε -окрестность, обладающую следующим свойством:

Существует n^2 функций k переменных

$$U_i^j(t_1, \dots, t_k), \quad (4.1.10)$$

определенных и непрерывных в кубе

$$|t_i| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, k, \quad (4.1.11)$$

таких, что матрицы $U_i^j(t_1, \dots, t_k)$ задают в выбранном базисе e всевозможные операторы из ε -окрестности оператора U , принадлежащие G , причем различным наборам (t_i) соответствуют разные операторы. Система функций (4.1.10) называется *параметризацией* группы в окрестности оператора U . Можно показать, что число k однозначно определяется группой G ; оно называется *размерностью* группы, а G называется *k -мерной* (или *k -параметрической*) группой Ли.

Далее, можно показать, что функции (4.1.10) всегда можно выбрать *аналитическими* (а не только непрерывными).

Каждая группа Ли может быть задана с помощью алгебраических соотношений, наложенных на коэффициенты матриц U_e ; для k -мерной группы надо связать действительные и мнимые части матричных элементов $(U_e)_i^j$ посредством $2n^2 - k$ независимых алгебраических уравнений с действительными коэффициентами.

Часто удобнее связывать *комплексными* уравнениями сами матричные элементы; как при этом производится подсчет параметров, будет ниже выяснено на примерах.

Изоморфизм групп. Группы G_1, G_2 называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение

$$\varphi: G_1 \rightarrow G_2 \quad (4.1.12)$$

такое, что для любых U, V из G_1

$$\varphi(UV) = \varphi(U) \cdot \varphi(V). \quad (4.1.13)$$

φ называется *изоморфизмом* групп G_1, G_2 .

Легко показать, что φ переводит единичный оператор в единичный и обратный в обратный:

$$\varphi(\epsilon_{G_1}) = \epsilon_{G_2}, \quad (4.1.14)$$

$$\varphi(U^{-1}) = [\varphi(U)]^{-1}.$$

Комментарии

1. Обычно понятие группы определяется более абстрактно, а именно, групповое произведение вводится во множестве элементов произвольной природы; можно, однако, показать, что ограничение группами, составленными из операторов или матриц, не составляет ущерба для приложений. Именно, большинство встречающихся в приложениях групп (например, конечные дискретные группы и компактные группы Ли) изоморфно подгруппам $GL(n, C)$ (при достаточно больших n).

2. Как правило, группа Ли в целом не может быть описана одной системой параметров (как, например, сфера не может быть описана одной системой координат без особенностей). Тем не менее можно ввести такую систему в окрестности каждого оператора; в частности, нас будет интересовать окрестность тождественного оператора $\epsilon(n)$.

3. Группы Ли обычно обладают тем свойством, что умножение оператора из группы на числа из определенного множества, например, на все не равные нулю комплекс-

ные числа, или на все действительные числа, или на все комплексные числа с модулем, равным единице, приводит снова к операторам из той же группы. Мы будем говорить, что группа Ли *допускает* умножение на соответствующие числа.

§ 4.2. Примеры групп

Дальше следуют примеры групп, сопровождаемые подсчетом числа параметров.

Группы Ли.

(а) *Полная линейная группа* $GL(n, C)$ уже была рассмотрена выше; она состоит из всех обратимых операторов в $C(n)$, или (в матричном изображении) из всех комплексных обратимых n -рядных матриц, и имеет размерность $2n^2$. $GL(n, C)$ допускает умножение на комплексные числа, не равные нулю.

(б) *Действительная линейная группа* $GL(n, R)$ состоит (в матричном изображении) из всех n -рядных обратимых матриц с действительными элементами. Чтобы выделить такие матрицы в $GL(n, C)$, надо приравнять нулю мнимые части всех n^2 элементов, что дает n^2 независимых соотношений. Таким образом, размерность $GL(n, R)$ равна n^2 . (Чтобы получить естественное определение $GL(n, R)$, следовало бы истолковать эту группу как группу всех обратимых операторов в *действительном* евклидовом пространстве, на чем мы не останавливаемся.) $GL(n, R)$ допускает умножение на не равные нулю действительные числа.

(с) *Специальная линейная, или унимодулярная, группа* $SL(n, C)$ есть подгруппа $GL(n, C)$, состоящая из всех операторов с определителем 1 (см. § 1.2), или, в матричном изображении, из всех матриц с определителем 1. Так как $\det(UV) = \det U \cdot \det V$, $\det \epsilon(n) = 1$,

$$\det(U^{-1}) = (\det U)^{-1},$$

то такие операторы образуют группу. $SL(n, C)$ выделяется соотношением $\det |U_i^j| = 1$, равносильным двум действительным соотношениям:

$$\operatorname{Re} \det |U_i^j| = 1, \quad \operatorname{Im} \det |U_i^j| = 0.$$

Таким образом, размерность $SL(n, C)$ равна $2n^2 - 2$. $SL(n, C)$ допускает умножение только на число 1.

(d) *Специальная действительная линейная группа* $SL(n, R)$ есть подгруппа $GL(n, R)$, состоящая из матриц с определителем, равным единице.

Легко проверить, что $SL(n, R)$ есть группа размерности $n^2 - 1$, допускающая умножение только на число 1.

(e) *Унитарная группа* $U(n)$ есть подгруппа $GL(n, C)$, состоящая из всех унитарных операторов (или, в матричном изображении, из всех унитарных матриц, см. § 1.2). По определению, унитарный оператор сохраняет скалярные произведения; из соотношений

$$(UVx|UVy) = (Vx|Vy) = (x|y),$$

$$(\epsilon(n) x | \epsilon(n) y) = (x|y),$$

$$(U^{-1}x|U^{-1}y) = (UU^{-1}x|y) = (\epsilon(n) x|y) = (x|y)$$

видно, что унитарные операторы образуют группу.

Для подсчета размерности воспользуемся матричным изображением и равенствами (1.2.18), характеризующими унитарные матрицы. Равенство вида

$$\sum_{i=1}^n |U_i^j|^2 = 1 \quad (4.2.1)$$

представляет одно соотношение, наложенное на действительные и мнимые части элементов U_i^j :

$$\sum_{i=1}^n [(\operatorname{Re} U_i^j)^2 + (\operatorname{Im} U_i^j)^2] = 1;$$

таких соотношений всего n ($j = 1, \dots, n$).

Равенство вида

$$\sum_{i=1}^n \bar{U}_i^j U_i^k = 0 \quad (j \neq k) \quad (4.2.2)$$

представляет два соотношения, наложенных на действи-

тельные и мнимые части U_i^j :

$$\sum_{i=1}^n (\operatorname{Re} U_i^j \operatorname{Re} U_i^k + \operatorname{Im} U_i^j \operatorname{Im} U_i^k) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n (\operatorname{Re} U_i^j \operatorname{Im} U_i^k - \operatorname{Im} U_i^j \operatorname{Re} U_i^k) = 0.$$

Таких соотношений всего $2 \frac{n(n-1)}{2}$.

Таким образом, размерность $U(n)$ равна

$$2n^2 - n - n(n-1) = n^2.$$

$U(n)$ допускает умножение на комплексные числа, по модулю равные единице (т. е. вида $e^{i\alpha}$, где α действительно):

$$(e^{i\alpha} Ux | e^{i\alpha} Uy) = e^{-i\alpha} e^{i\alpha} (Ux | Uy) = (x | y).$$

В частности, операторы вида $e^{i\alpha} \epsilon(n)$ унитарны; они называются *градиентными преобразованиями* пространства $C(n)$. Геометрический смысл унитарных операторов заключен в их определении (1.2.15): это — *вращения* в комплексном евклидовом пространстве $C(n)$.

(f) *Ортогональная группа* $O(n)$ есть подгруппа $U(n)$, состоящая из действительных матриц (действительные унитарные матрицы называются *ортогональными*). Для таких матриц равенства (4.2.1) дают n соотношений, а равенства (4.2.2) $\frac{n(n-1)}{2}$ соотношений между действитель-

ными элементами матриц; итак, размерность $O(n)$ есть $n^2 - n - n(n-1)/2 = n(n-1)/2$. $O(n)$ допускает умножение на числа ± 1 . Геометрический смысл операторов из $O(n)$ нетрудно указать: это — вращения (собственные и несобственные) действительного евклидова пространства.

(g) *Специальная унитарная группа* $SU(n)$ есть группа всех унитарных унимодулярных операторов в $C(n)$, т. е. общая часть (пересечение) подгрупп $SL(n, C)$ и $U(n)$. Чтобы получить эту подгруппу, надо (в матричном изображении), кроме $n + n(n-1)$ соотношений, выражающих унитарность, наложить еще условие унимодулярности: $\det |U_i^j| = 1$.

Заметим, что условие унимодулярности не является независимым от уже наложенных ранее условий унитарности: из этих последних вытекает, что $|\det |U_i^j|| = 1$, так что условие унимодулярности фиксирует лишь аргумент определителя. Таким образом, здесь добавляется *одно* новое условие.

Размерность $SU(n)$ равна

$$2n^2 - n(n-1) - n - 1 = n^2 - 1.$$

$SU(n)$ допускает умножение только на число 1.

Группы $SU(n)$ играют центральную роль в теории элементарных частиц.

(h) *Специальная ортогональная группа* $SO(n)$ есть пересечение подгрупп $O(n)$ и $SL(n, C)$. К соотношениям, выделяющим $O(n)$, добавляется соотношение унимодулярности $\det |O_i^j| = 1$. Однако каждая ортогональная матрица имеет определитель, равный ± 1 ; в самом деле,

$$\det O \cdot \det O^{-1} = \det \epsilon(n) = 1;$$

но $(O^{-1})_i^j = O_j^i$ (транспонированная матрица), так что

$$\det O^{-1} = \det O \text{ и } (\det O)^2 = 1.$$

Поэтому условие $\det O = 1$ не является независимым от условий ортогональности и не уменьшает числа независимых параметров группы. В отличие от всех других групп (a) — (h), группа $O(n)$ не связна: матрицу с определителем 1 нельзя непрерывным изменением превратить в матрицу с определителем -1 . $O(n)$ распадается на связанные куски (компоненты), выделяемые условиями $\det O = 1$ и $\det O = -1$. Первая из этих компонент есть $SO(n)$. Размерность $SO(n)$ равна, следовательно, размерности $O(n)$, т. е. $n(n-1)/2$. $SO(n)$ допускает умножение только на число 1.

Операторы $SO(n)$ представляют собой собственные (не меняющие ориентации) вращения действительного евклидова пространства R^n .

Дискретные группы.

(a) *Симметрическая группа* S_n строится следующим образом. Возьмем в $C(n)$ базис $\{e_i\}$ и поставим в соответствие каждому e_i некоторый $e_{m(i)}$ так, чтобы при $i \neq j$ было

$m(i) \neq m(j)$. Тогда получается *перестановка*

$$e_i \rightarrow e_{m(i)}$$

базисных векторов. Такую перестановку можно истолковать как оператор, переводящий e_i в $e_{m(i)}$:

$$Ue_i = e_{m(i)}$$

(ср. (1.2.2)); мы будем называть такой оператор *оператором перестановки осей*.

Легко видеть, что матрица такого оператора U содержит в каждом столбце одну единицу и $n - 1$ нулей; значит, $\det U = \pm 1$. Произведение таких операторов есть снова оператор перестановки осей: если

$$Ue_i = e_{m(i)}, \quad Ve_i = e_{k(i)},$$

то

$$(UV)e_i = U(Ve_i) = Ue_{k(i)} = e_{m(k(i))}.$$

$\epsilon(n)$ есть тоже оператор перестановки осей, соответствующий «тождественной» перестановке: $m(i) = i$.

Наконец, если $Ue_i = e_{m(i)}$, то $U^{-1}e_j = e_{k(j)}$, где $k(j)$ — такое число (из ряда $1, 2, \dots, n$), что $m(k(j)) = j$.

Итак, S_n есть группа. Эта группа конечна и имеет столько элементов, сколько существует перестановок из n предметов, т. е. $n!$. Ясно, что мы могли бы составить эту группу не из операторов, переставляющих векторы базиса, а из перестановок каких угодно предметов (ср. § 4.1). Однако в приложениях к физике группа S_n обычно выступает именно как «группа перестановок координатных осей»; с этой точки зрения наше изложение не представляется искусственным.

Мы видели выше, что все (интересные для приложений) группы Ли можно получить как подгруппы $GL(n, C)$, накладывая те или иные соотношения. Аналогично симметрическая группа является «универсальным вместилищем» конечных групп: каждая группа из конечного числа элементов может быть получена, как подгруппа S_n (при достаточно большом n).

(b) *Знакопеременная группа* A_n есть подгруппа S_n , состоящая из *четных* операторов перестановки осей, т. е. таких, определитель которых равен 1. Легко подсчитать, что подгруппа A_n содержит ровно половину элементов S_n , т. е. $n!/2$ операторов.

§ 4.3. Представления группы

Каждая группа G , согласно определению § 4.1, состоит из операторов, действующих в некотором $C(n)$, или (в матричной форме) из n -рядных матриц. Таким образом, каждой группе можно сопоставить число n . Понятие *представления* служит для установления связи между группами операторов в пространствах различной размерности. Это понятие имеет важное значение для всех вопросов, где существенны свойства симметрии изучаемой системы; в частности, оно необходимо в теории элементарных частиц. Говорят, что дано k -рядное представление группы G (или гомоморфизм G в группу k -рядных операторов), если каждому оператору U из G поставлен в соответствие некоторый оператор $P(U)$, действующий в $C(k)$, причем произведению операторов в $C(n)$ соответствует произведение операторов в $C(k)$ и единичному оператору в $C(n)$ — единичный оператор в $C(k)$:

$$P(UV) = P(U) \cdot P(V), \quad P(\epsilon(n)) = \epsilon(k). \quad (4.3.1)$$

Число k называется *степенью* представления P .

Из (4.3.1) ясно, что произведение операторов вида $P(U)$ есть оператор того же вида. Далее, $P(\epsilon(n)) = \epsilon(k)$, и тождественный оператор в $C(k)$ тоже имеет вид $P(U)$. Наконец, если $V = U^{-1}$, то

$$P(U) P(U^{-1}) = P(\epsilon(n)) = \epsilon(k),$$

следовательно,

$$P(U^{-1}) = [P(U)]^{-1}.$$

Итак, операторы вида $P(U)$, где U пробегает все элементы G , образуют группу; обозначим эту группу через $P(G)$. Представление называется *унитарным*, если все операторы $P(U)$ унитарны. Представление $P(G)$ можно наглядно истолковать как некоторое «изображение» n -рядных операторов k -рядными: действие оператора U в $C(n)$ «вызывает» связанное с ним по некоторому закону действие оператора $P(U)$ в $C(k)$. Поскольку вычисление представлений составляет одну из наших основных задач, мы пока ограничимся немногими примерами, откладывая детальное изучение представлений до главы 5.

Читатель легко проверит, что в этих примерах выполнены условия (4.3.1).

(а) *Тожественное (или еще: фундаментальное) представление.* В этом случае $k = n$ и $P(U) = U$ для всех U из G . Каждый оператор U «изображается» самим собой.

(б) *Тривиальное представление.* $P(U)$ для всех U из G полагается равным тождественному оператору $\epsilon(k)$ (k произвольно).

(в) *Скалярное представление.* Пусть $k = 1$; положим $P(U) = \det U$. В этом случае комплексные числа $P(U)$ рассматриваются как однорядные матрицы. В силу свойств определителя оператора (§ 1.2), условия (4.3.1) выполняются. Заметим, что все операторы вида $UVU^{-1}V^{-1}$ переходят при этом в $\epsilon(k)$; если группа G не коммутативна, то порядок перемножения в G существует, а в $P(G)$ — нет:

$$P(UV) = P(U) \cdot P(V) = P(V) \cdot P(U) = P(VU).$$

Мы видим, что изображение n -рядных операторов однорядными «огрубляет» их алгебраические свойства.

Абелевы группы не имеют других неприводимых представлений кроме тривиального и скалярного.

(д) *Индукцированные представления.* Как мы видели в § 3.3, каждый тип тензоров $T(p, q)$ позволяет сопоставить операторам U , действующим в $C(n)$, индуцированные операторы $\Pi(U)$, действующие в $C(p, q)$. Из (3.3.10) следует, что Π — представление полной линейной группы $GL(n, C)$. Степень этого представления равна размерности пространства $C(p, q)$, т. е. n^{p+q} . Если рассматривать вместо $GL(n, C)$ некоторую ее подгруппу G , то Π определяет n^{p+q} -рядное представление группы G : надо рассматривать лишь те $\Pi(U)$, которые соответствуют операторам U из G . В частности, если в качестве G взять $U(n)$, то и операторы $\Pi(U)$ будут унитарны (§ 3.3); получается *унитарное* представление группы $U(n)$ операторами, действующими в пространстве $C(p, q)$.

Представление P называется *точным*, если оно ставит в соответствие различным операторам U, V из G различные операторы из $P(G)$ (другой термин: гомоморфизм P называется в этом случае *изоморфизмом* групп G и $P(G)$).

Тожественное представление, очевидно, точно. Тривиальное представление неточно, если G состоит не из

одного оператора $\epsilon(n)$. Одномерное представление не точно, если G — не абелева группа (обратное неверно!). Можно показать, что индуцированные представления, как правило, точны (есть исключения).

Сумма представлений. Пусть дано k -рядное представление группы G ; пусть $C(k)$ — пространство представления — может быть разложено в ортогональную сумму

$$C(k) = C(k_1) \oplus \dots \oplus C(k_s) \quad (4.3.2)$$

комплексных евклидовых пространств таким образом, что каждое пространство $C(k_j)$ инвариантно относительно представляющих операторов, т. е. для всех U из G оператор $P(U)$ переводит векторы $C(k_j)$ в векторы того же подпространства. Тогда операторы $P(U)$, рассматриваемые только на $C(k_j)$, определяют k_j -рядное представление G , которое мы обозначим через P_j . В данной ситуации говорят, что представление P распадается в ортогональную сумму представлений P_j :

$$P = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_s. \quad (4.3.3)$$

Если выбрать ортонормированный базис в каждом подпространстве $C(k_j)$, то вместе эти базисы составляют базис C .

В таком базисе все операторы $P(U)$ изображаются ящичными матрицами вида (2.2.11) с ящиками из k_1, k_2, \dots, k_s рядов.

Произведение представлений. Пусть даны представления P, Q одной и той же группы G , соответственно, в пространствах $C(k), C(l)$. Построим тензорное произведение этих пространств:

$$C(k) \otimes C(l) \quad (4.3.4)$$

(размерности kl , см. § 2.3).

Каждому оператору U из группы G соответствуют представляющие операторы $P(U), Q(U)$, действующие, соответственно, в пространствах $C(k), C(l)$. Построим тензорное произведение этих операторов:

$$P(U) \otimes Q(U) \quad (4.3.5)$$

— оператор, действующий в пространстве $C(k) \otimes C(l)$ (см. § 2.4). Из определения тензорного произведения

операторов видно, что

$$\begin{aligned} P(UV) \otimes Q(UV) &= P(U)P(V) \otimes Q(U)Q(V) = \\ &= (P(U) \otimes Q(U))(P(V) \otimes Q(V)), \end{aligned}$$

так что формула (4.3.5) определяет некоторое представление группы G в пространстве $C(k) \otimes C(l)$. Это представление называется *тензорным* (кронеккеровым) *произведением представлений* P, Q . Строение матриц, изображающих операторы (4.3.5), видно из (2.4.2).

Аналогично определяется произведение любого числа представлений.

Эквивалентность представлений. Пусть даны представления P, Q одной и той же группы G в одном и том же пространстве $C(k)$. Тогда $P(U), Q(U)$, при переменном U из G , составляют два семейства линейных операторов в $C(k)$. Может случиться, что эти семейства переходят друг в друга при некотором преобразовании W пространства $C(k)$, т. е. что

$$Q(U) = WP(U)W^{-1} \quad (4.3.6)$$

при всех U (обратимый оператор W один и тот же для всех U). В этом случае представления P и Q называются *эквивалентными*. Смысл соотношения (4.3.6) можно пояснить следующим образом: если $P(U)$ переводит вектор x в вектор y , то $Q(U)$ переводит вектор Wx в вектор Wy ; иначе говоря, образы и прообразы всех операторов $P(U)$ «поворачиваются» с помощью одного и того же «движения» W . Ясно, что различие между представлениями P, Q в некотором смысле несущественно.

Если оператор W унитарен, то представления P, Q называются *унитарно эквивалентными*. Если перейти к матричному изображению представляющих операторов, то для унитарно эквивалентных представлений P, Q матрицы $P(U)$ переходят в $Q(U)$ при некоторой замене базиса в $C(k)$. Для простой (не унитарной) эквивалентности то же верно, если пользоваться общими, не обязательно ортонормированными базисами; в этой книге такие базисы нам не понадобятся.

Заметим, что представления *одинаковой степени* (т. е. в пространствах одной размерности) мы всегда можем

заменить представлениями в *одном и том же* пространстве; в самом деле, все комплексные евклидовы пространства данной размерности изоморфны и могут быть отождествлены.

Неприводимые представления. Пусть P — представление группы G в пространстве $C(k)$. Если $C(k)$ не содержит подпространства меньшей размерности, инвариантного относительно группы $P(G)$, то представление P называется *неприводимым*, в противном случае — *приводимым*. В ряде важных случаев изучение всех представлений может быть сведено к изучению неприводимых. Например, для групп $SU(n)$ справедлива следующая теорема:

Каждое представление группы $SU(n)$ разлагается в ортогональную сумму неприводимых представлений; это разложение единственно с точностью до эквивалентности, т. е. два таких разложения, после надлежащего изменения порядка слагаемых, состоят из эквивалентных представлений. Подробнее это значит, что разложения на неприводимые представления

$$P = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_m, \quad Q = Q_1 \oplus Q_2 \oplus \dots \oplus Q_n$$

обязательно содержат одинаковое число слагаемых ($m=n$), и существует такая подстановка $(v_1 v_2 \dots v_n)$, что Q_i и P_{v_i} эквивалентны ($i = 1, 2, \dots, n$).

Аналогичное утверждение о разложении неверно для некоторых других классических групп, например для полной линейной группы $GL(n, C)$.

§ 4.4. Алгебры Ли.

Определения и основные свойства

Наряду с группами Ли нам придется работать с другими системами операторов, которые тесно связаны с ними. Для любых двух операторов A, B в пространстве $C(n)$ можно определить их *коммутатор* — оператор

$$[A, B] = AB - BA \quad (4.4.1)$$

(называемый также *произведением Ли*). Система операторов \mathbf{A} в $C(n)$ называется *алгеброй Ли*, если \mathbf{A} обладает

следующими свойствами:

1. Сумма двух операторов из \mathbf{A} есть опять оператор из \mathbf{A} .
 2. Для любого оператора A из \mathbf{A} и любого действительного числа λ оператор λA также принадлежит \mathbf{A} .
 3. Если A, B — операторы из \mathbf{A} , то и оператор $\frac{1}{i} [A, B]$ принадлежит \mathbf{A} .
- (4.4.2)

Комментарии

Введение множителя $1/i$ в это определение мотивируется тем, что для эрмитовых операторов A, B коммутатор $C = [A, B]$ — *антиэрмитов* оператор (для которого $C^+ = -C$). Некоторые наиболее важные системы операторов состоят из эрмитовых операторов. Чтобы превратить коммутирование в операцию, не выводящую за пределы такой системы, коммутатор умножают на $1/i$; при таком умножении антиэрмитовы операторы переходят в эрмитовы.

Тогда «перестановочные соотношения» между операторами системы могут быть записаны в виде

$$[A, B] = iC \quad (4.4.3)$$

(все три оператора A, B, C — эрмитовы).

В математической литературе принято несколько иное определение алгебр Ли; именно, вместо условия 3 в (4.4.2) требуется, чтобы для любых A, B из алгебры Ли коммутатор $[A, B]$ принадлежал \mathbf{A} . При таком определении пришлось бы, руководствуясь групповым подходом, отказаться от употребления в физике эрмитовых операторов и заметить их антиэрмитовыми, что связано с рядом неудобств, например, с мнимостью собственных значений. Мы предпочли поэтому видоизменить определение алгебры Ли (вполне тривиальным образом).

Изоморфизм алгебр Ли. Алгебры Ли $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ *изоморфны*, если существует взаимно однозначное отображение

$$\varphi: \mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{A}_2 \quad (4.4.4)$$

такое, что

$$\left. \begin{aligned} \varphi(A + B) &= \varphi(A) + \varphi(B), \\ \varphi(\lambda A) &= \lambda\varphi(A) \quad (\lambda \text{ действительно}), \\ \varphi\left(\frac{1}{i}[A, B]\right) &= \frac{1}{i}[\varphi(A), \varphi(B)]. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.5)$$

φ называется при этом *изоморфизмом* алгебр Ли.

Свойства коммутаторов. Докажем для дальнейших приложений некоторые свойства коммутаторов.

Антикоммутативность умножения Ли вытекает прямо из его определения:

$$[A, B] = -[B, A]. \quad (4.4.6)$$

В частности, при $A = B$ имеем

$$[A, A] = 0. \quad (4.4.7)$$

Тождества Якоби. Докажем сначала тождество

$$[AB, C] = [A, C]B + A[B, C] \quad (4.4.8)$$

прямой проверкой:

$$\begin{aligned} [AB, C] &= ABC - CAB = (ACB - CAB) + \\ &+ (ABC - ACB) = [A, C]B + A[B, C]. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается тождество

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0. \quad (4.4.9)$$

Это тождество заменяет свойство ассоциативности, которым не обладает умножение Ли: простые примеры показывают, что, вообще говоря, $[[A, B], C] \neq [A, [B, C]]$.

Задание алгебры Ли с помощью образующих и соотношений. Конечная система операторов L_1, L_2, \dots, L_s из \mathbf{A} называется системой *образующих* (или *генераторов*) \mathbf{A} , если каждый оператор из \mathbf{A} может быть представлен как линейная комбинация образующих операторов с действительными коэффициентами:

$$A = \sum_{j=1}^s a_j L_j. \quad (4.4.10)$$

В этом параграфе мы будем предполагать, что образующие L_j линейно независимы; тогда разложение (4.4.10) однозначно, т. е. коэффициенты вполне определяются оператором A . Можно доказать, что каждая алгебра Ли имеет систему образующих, которая может быть выбрана бесконечным множеством способов. Разлагая по L_l коммутатор образующих L_i, L_k , имеем:

$$\frac{1}{i} [L_i, L_k] = \sum_{l=1}^s c_{ik,l} L_l. \quad (4.4.11)$$

Равенства (4.4.11) называются *перестановочными соотношениями*, а постоянные $c_{ik,l}$ — *структурными постоянными* алгебры Ли; они позволяют вычислить коммутатор любых двух операторов этой алгебры.

В самом деле, выражая A и B в виде (4.4.10), имеем:

$$\frac{1}{i} [A, B] = \sum_{i, k=1}^s a_i b_k \cdot \frac{1}{i} [L_i, L_k] = \sum_{i, k, l=1}^s a_i b_k c_{ik,l} L_l. \quad (4.4.12)$$

Таким образом, мы знаем полностью закон коммутирования в алгебре Ли, если указаны структурные константы. Но $c_{ik,l}$ не могут быть заданы произвольно; в самом деле, (4.4.7), (4.4.6) и (4.4.9) в применении к операторам L_j означают, что

$$\left. \begin{aligned} c_{ii,l} &= 0, \\ c_{ik,l} &= -c_{ki,l}, \\ \sum_{l=1}^s (c_{ik,l} c_{lp,q} + c_{kp,l} c_{li,q} + c_{pi,l} c_{lk,q}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.13)$$

Можно доказать, что всякая алгебра Ли может быть задана указанием структурных констант, удовлетворяющих соотношениям (4.4.13); если эти константы известны, можно найти коммутатор любых операторов алгебры по правилу (4.4.12). Мы будем задавать алгебры Ли указанием образующих L_j и соотношений (4.4.11).

Следует заметить, что выбор тех или иных образующих в алгебре Ли диктуется соображениями удобства вычислений (желательно, чтобы структурные константы

были возможно проще). Часто оказывается, что удачно выбранные образующие допускают физическое истолкование. Однако не следует отождествлять алгебру Ли с системой ее образующих и соотношений, так как ее можно задать и с помощью других образующих. Иногда переход к новым образующим позволяет сделать теорию более пригодной для работы, как мы увидим на примерах. Наконец, часто бывает удобно вводить линейно зависимые образующие; это позволяет упростить перестановочные соотношения, но приводит к неоднозначности коэффициентов в (4.4.11).

Подалгебры Ли. Если алгебра Ли \mathbf{A} является подмножеством алгебры Ли \mathbf{A}' , то \mathbf{A} называется *подалгеброй* \mathbf{A}' .

Выбрав в \mathbf{A} систему образующих L_1, \dots, L_s , мы можем ее дополнить до системы образующих \mathbf{A}' ; тогда перестановочные соотношения (4.4.11) подалгебры \mathbf{A} составляют часть перестановочных соотношений алгебры \mathbf{A}' . Обратное, пусть задана система образующих в алгебре Ли \mathbf{A}' , часть которой составляют L_1, \dots, L_s , причем правые части перестановочных соотношений для L_1, \dots, L_s являются линейными комбинациями *этих же* образующих. Тогда всевозможные линейные комбинации L_1, \dots, L_s с действительными коэффициентами составляют подалгебру в \mathbf{A}' .

§ 4.5. Примеры алгебр Ли

(а) $AGL(n, C)$ состоит из *всех* операторов в $C(n)$; это алгебра Ли, образующие которой могут быть выбраны следующим образом. Пусть B_k^i есть матрица, у которой элемент на пересечении k -й строки и i -го столбца равен единице, а все остальные — нулю. *Индексы означают теперь нумерацию матриц, а не матричных элементов*; поэтому для записи этих последних перейдем к следующему обозначению: пусть элемент матрицы B на пересечении μ -й строки и ν -го столбца будет $(\mu|B|\nu)$. Тогда

$$(\mu|B_k^i|\nu) = \delta_\nu^i \delta_k^\mu,$$

$$\begin{aligned} (\mu|[B_k^i, B_m^l]|\nu) &= (\mu|B_k^i B_m^l - B_m^l B_k^i|\nu) = \\ &= \delta_\lambda^i \delta_k^\mu \delta_\nu^l \delta_m^\lambda - \delta_\lambda^l \delta_m^\mu \delta_\nu^i \delta_k^\lambda = \delta_m^i (\mu|B_k^l|\nu) - \delta_k^l (\mu|B_m^i|\nu), \end{aligned}$$

(4.5.1)

ИЛИ

$$[B_k^i, B_m^l] = \delta_m^i B_k^l - \delta_k^l B_m^i. \quad (4.5.2)$$

Это и суть перестановочные соотношения для образующих B_k^i (деление обеих частей на i дает структурные константы).

Любой оператор разлагается по B_k^i с комплексными коэффициентами, или по B_k^i, iB_k^i — с действительными коэффициентами. Таким образом, полную систему образующих в смысле § 4.4, алгебры Ли $AGL(n, C)$ составляют B_k^i, iB_k^i .

(b) $ASL(n, C)$ состоит из всех бесследных операторов в $C(n)$. В качестве образующих возьмем матрицы Окубо

$$A_k^i = B_k^i - \frac{1}{n} \delta_k^i (B_1^1 + B_2^2 + \dots + B_n^n). \quad (4.5.3)$$

Легко проверить, что $\text{Sp } A_k^i = 0$. Эти матрицы связаны одной линейной зависимостью

$$A_1^1 + A_2^2 + \dots + A_n^n = 0. \quad (4.5.4)$$

Любой бесследный оператор разлагается по A_k^i с комплексными коэффициентами, или по A_k^i, iA_k^i — с действительными коэффициентами.

Чтобы разложить n -рядную бесследную матрицу M по этим образующим, выражаем ее сначала через B_k^i :

$$M = \omega_i^k B_k^i = \omega_i^k \left(A_k^i + \frac{1}{n} \delta_k^i B_l^l \right).$$

Так как $\text{Sp } M = 0$, то

$$\omega_k^i \left(\text{Sp } A_k^i + \frac{1}{n} \delta_k^i n \right) = \omega_l^l = 0,$$

$$M = \omega_i^k A_k^i, \quad (4.5.5)$$

где коэффициенты связаны соотношением

$$\omega_l^l = 0. \quad (4.5.6)$$

Легко видеть, что при условии (4.5.6) коэффициенты определяются однозначно. Так как матрицы B_k^i, B_l^l коммути-

руг друг с другом, то из (4.5.2), (4.5.3) следует, что

$$[A_k^i, A_m^l] = \delta_m^i B_k^l - \delta_k^l B_m^i.$$

Подставляя в правую часть вместо B_k^l, B_m^i выражения из (4.5.3)

$$B_k^l = A_k^l + \frac{1}{n} \delta_k^l B_j^j, \quad B_m^i = A_m^i + \frac{1}{n} \delta_m^i B_j^j,$$

имеем:

$$[A_k^i, A_m^l] = \delta_m^i A_k^l - \delta_k^l A_m^i = (\delta_m^i \delta_r^l \delta_k^s - \delta_k^l \delta_r^i \delta_m^s) A_s^r. \quad (4.5.7)$$

(с) $AU(n)$ состоит из всех эрмитовых операторов в $C(n)$. Каждая эрмитова матрица A представляется в виде

$$A = \omega_k^i B_k^i, \quad \omega_k^i = \overline{\omega_i^k}. \quad (4.5.8)$$

Если записать ω_i^k в виде $\alpha_i^k + i\beta_i^k$, где α_i^k и β_i^k действительны, то A представляется как линейная комбинация с действительными коэффициентами образующих $B_i^i, B_k^i + B_i^k, (B_k^i - B_i^k)$. Однако часто бывает выгодно сохра-

нить неэрмитовы образующие B_k^i , расширяя смысл понятия образующих; тогда для выражения A через эти «внешние» образующие приходится пользоваться комплексными коэффициентами ω_k^i , удовлетворяющими соотношениям $\omega_k^i = \overline{\omega_i^k}$:

$$A = \omega_k^i B_k^i, \quad \omega_k^i = \overline{\omega_i^k}. \quad (4.5.9)$$

(d) $ASU(n)$ состоит из всех бесследных эрмитовых операторов в $C(n)$. В качестве ее «внутренних» образующих можно взять $A_i^i, A_k^i + A_i^k, i(A_k^i - A_i^k)$; по этим образующим бесследные эрмитовы матрицы разлагаются с действительными коэффициентами.

В силу (4.5.4), эти образующие зависимы; разложение можно сделать однозначным, потребовав, чтобы сумма коэффициентов при A_i^i была равна нулю. Но можно воспользоваться и «внешними» образующими A_k^i :

$$A = \omega_k^i A_k^i, \quad \omega_k^i = \overline{\omega_i^k}, \quad \omega_i^i = 0. \quad (4.5.10)$$

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи, встречающиеся в физике.

(е) $n = 2$. Паули предложил в качестве образующих для $AU(2)$ эрмитовы матрицы

$$\frac{1}{2}\epsilon(2) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.5.11)$$

Всякая эрмитова матрица A разлагается по матрицам (4.5.11) с действительными коэффициентами; если A бесследна, то в разложение не входит $\epsilon(2)$.

Таким образом, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ представляют собой образующие для $ASU(2)$.

Перестановочные соотношения для матриц Паули получаются из их «таблицы умножения»:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1\sigma_2 &= \frac{1}{2}i\sigma_3, & \sigma_2\sigma_3 &= \frac{1}{2}i\sigma_1, & \sigma_3\sigma_1 &= \frac{1}{2}i\sigma_2, \\ \sigma_2\sigma_1 &= -\frac{1}{2}i\sigma_3, & \sigma_3\sigma_2 &= -\frac{1}{2}i\sigma_1, & \sigma_1\sigma_3 &= -\frac{1}{2}i\sigma_2, \\ \sigma_1^2 &= \sigma_2^2 = \sigma_3^2 &= \frac{1}{4}\epsilon(2). \\ [\sigma_1, \sigma_2] &= i\sigma_3, & [\sigma_2, \sigma_3] &= i\sigma_1, & [\sigma_3, \sigma_1] &= i\sigma_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.12)$$

Для $AGL(2, C)$ базис составляют образующие

$$b_1^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.5.13)$$

Эрмитовы матрицы разлагаются по этим образующим по формуле

$$A = \alpha b_1^1 + (\lambda - i\mu) b_1^2 + (\lambda + i\mu) b_2^1 + \beta b_2^2, \quad (4.5.14)$$

где $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ действительны.

Для бесследных матриц Окубо предложил образующие a_k^i :

$$a_1^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad a_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad a_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad a_2^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$(4.5.15)$$

связанные соотношением

$$a_1^1 + a_2^2 = 0. \quad (4.5.16)$$

Перестановочные соотношения для матриц Окубо получаются из (4.5.7):

$$\left. \begin{aligned} [a_1^1, a_1^2] &= a_1^2, & [a_2^2, a_1^2] &= -a_1^2, \\ [a_1^1, a_2^1] &= -a_2^1, & [a_2^2, a_2^1] &= a_2^1, \\ [a_1^1, a_2^2] &= 0, & [a_1^2, a_2^1] &= a_1^1 - a_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.17)$$

Для бесследных эрмитовых матриц имеем разложение

$$A_0 = \alpha a_1^1 + (\lambda + i\mu) a_1^2 + (\lambda - i\mu) a_2^1 + \beta a_2^2, \quad (4.5.18)$$

где $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ действительны; разложение однозначно при условии $\alpha + \beta = 0$.

Связь между матрицами Паули и Окубо дается формулами

$$a_1^2 = \sigma_1 + i\sigma_2, \quad a_2^1 = \sigma_1 - i\sigma_2, \quad a_1^1 = -a_2^2 = \sigma_3. \quad (4.5.19)$$

(f) $n = 3$. По аналогии с матрицами Паули, Гелл-Манн построил восемь бесследных эрмитовых матриц λ_i , которые вместе с $\epsilon(3)$ составляют систему независимых образующих для $AGL(3, C)$ (с комплексными коэффициентами); без $\epsilon(3)$ они являются образующими для бесследных матриц (с комплексными коэффициентами) и для бесследных эрмитовых матриц (с действительными коэффициентами):

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, & \lambda_8 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.20)$$

(Выбор множителя в λ_8 объясняется тем, что при таком выборе получается простое выражение для следа произведения:

$$\text{Sp}(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, 8), \quad (4.5.21)$$

что, впрочем, для нас несущественно, так как мы не будем пользоваться матрицами Гелл-Манна.)

Перестановочные соотношения для матриц Гелл-Манна, как нетрудно проверить, имеют вид

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2i \sum_k f_{ijk} \lambda_k, \quad (4.5.22)$$

где f_{ijk} — действительные коэффициенты, антисимметричные относительно индексов i, j, k , т. е. не меняющиеся (соответственно, меняющие знак) при четной (соответственно, нечетной) перестановке индексов; достаточно поэтому перечислить те f_{ijk} , у которых $i < j < k$ и которые отличны от нуля:

ijk	f_{ijk}	ijk	f_{ijk}	ijk	f_{ijk}
123	1	246	$\frac{1}{2}$	367	$-\frac{1}{2}$
147	$\frac{1}{2}$	257	$\frac{1}{2}$	458	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
156	$-\frac{1}{2}$	345	$\frac{1}{2}$	678	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

(4.5.23)

Очевидная громоздкость перестановочных соотношений (4.5.22), (4.5.23) делает применение матриц Гелл-Манна неудобным. Поэтому Окубо выбрал «внешнюю» систему из девяти образующих A_j^i , состоящую не только из эрмитовых матриц:

$$A_1^1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad A_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\left. \begin{aligned}
 A_2^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & A_2^2 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, & A_2^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 A_3^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & A_3^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & A_3^3 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \right\} \quad (4.5.24)$$

Все эти матрицы бесследны и удовлетворяют одному линейному соотношению (ср. (4.5.4)):

$$A_1^1 + A_2^2 + A_3^3 = 0. \quad (4.5.25)$$

Диагональные матрицы A_i^i эрмитовы.

Перестановочные соотношения для трехрядных операторов Окубо представляют частный случай соотношений (4.5.7) (индексы пробегает три значения):

$$\left. \begin{aligned}
 [A_i^i, A_l^l] &= 0, & [A_k^i, A_m^l] &= 0 \quad (i \neq m, l \neq k), \\
 [A_k^i, A_i^l] &= A_k^l \quad (l \neq k), & [A_k^i, A_l^k] &= -A_l^i \quad (i \neq l), \\
 [A_k^i, A_i^k] &= A_k^k - A_i^i.
 \end{aligned} \right\} \quad (4.5.26)$$

Любая трехрядная матрица разлагается по A_k^i , $\epsilon(3)$ согласно формуле (4.5.9), где надо выразить B_k^i через A_k^i и $B_1^1 + B_2^2 + B_3^3 = \epsilon(3)$ (см. (4.5.3)).

Любая трехрядная эрмитова матрица разлагается по A_k^i и $\epsilon(3)$ по формуле (4.5.9), т. е. однозначно выражается через матрицы Окубо и $\epsilon(3)$ в виде

$$\begin{aligned}
 A &= \epsilon(3) + \alpha A_1^1 + \beta A_2^2 + \gamma A_3^3 + (\lambda + i\mu) A_1^2 + \\
 &\quad + (\lambda - i\mu) A_2^1 + (\sigma + i\tau) A_1^3 + (\sigma - i\tau) A_3^1 + \\
 &\quad + (\eta + i\zeta) A_2^3 + (\eta - i\zeta) A_3^2 \\
 &\quad (\alpha + \beta + \gamma = 0), \quad (4.5.27)
 \end{aligned}$$

где $\epsilon, \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \sigma, \tau, \eta, \zeta$ действительны. Если A — эрмитова бесследная матрица, то в разложении (4.5.27) $\epsilon = 0$.

Связь между матрицами Окубо и матрицами Гелл-Манна дается формулами

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= A_1^2 + A_2^1, & \lambda_4 &= A_1^3 + A_3^1, & \lambda_6 &= A_2^3 + A_3^2, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{i}(A_1^2 - A_2^1), & \lambda_5 &= \frac{1}{i}(A_1^3 - A_3^1), & \lambda_7 &= \frac{1}{i}(A_2^3 - A_3^2), \\ \lambda_3 &= A_1^1 - A_2^2, & \lambda_8 &= -\sqrt{3} A_3^3. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.28)$$

(g) $n = 4$. Дирак предложил 16 четырехрядных эрмитовых матриц в качестве образующих для алгебры всех четырехрядных матриц (с комплексными коэффициентами) или эрмитовых четырехрядных матриц (с действительными коэффициентами). Чтобы получить эти матрицы, вспомним тензорное произведение операторов (см. (2.4.1)); обозначая тем же знаком соответствующую операцию над матрицами, изображенную формулой (2.4.2), построим из двухрядных матриц Паули σ_i (2) четырехрядные матрицы:

$$\sigma_i(4) = 2\epsilon(2) \otimes \sigma_i(2),$$

$$\rho_i(4) = 2\sigma_i(2) \otimes \epsilon(2) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.5.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & \sigma_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}, & \sigma_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \\ \rho_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \rho_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \rho_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.30)$$

Тогда 16 матриц $\epsilon(4)$, σ_i , ρ_i , σ_k , ρ_k ($i, k = 1, 2, 3$), как можно показать, линейно независимы и составляют базис для всех четырехрядных матриц (с комплексными коэффициентами) и для всех эрмитовых матриц (с действительными коэффициентами). Базис для бесследных матриц получим, отбрасывая $\epsilon(4)$.

Чтобы разложить произвольную матрицу по указанному базису, обозначим базисные матрицы через $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{16}$; тогда, как легко проверить,

$$\frac{1}{4} \text{Sp}(\tau_i \tau_k) = \delta_{ik}. \quad (4.5.31)$$

Поэтому коэффициенты разложения

$$\tau = \sum_{j=1}^{16} \epsilon_j \tau_j \quad (4.5.32)$$

могут быть определены аналогично коэффициентам Фурье:

$$\epsilon_j = \frac{1}{4} \text{Sp}(\tau \tau_j). \quad (4.5.33)$$

Перестановочные соотношения для σ_i , ρ_k получаются из таблицы умножения, аналогичной (4.5.12):

$$[\sigma_i, \rho_k] = 0, [\sigma_i, \sigma_k] = 2i\epsilon_{ikl}\sigma_l, [\rho_i, \rho_k] = 2i\epsilon_{ikl}\rho_l, \quad (4.5.34)$$

где ϵ_{ikl} — числа, антисимметричные относительно индексов i, k, l , причем $\epsilon_{123} = 1$:

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \quad (4.5.35)$$

$$\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1.$$

Перестановочные соотношения для других матриц Дирака получаются из той же таблицы умножения; например,

$$[\sigma_1 \rho_1, \sigma_2 \rho_3] = \sigma_1 \sigma_2 \rho_1 \rho_3 - \sigma_2 \sigma_1 \rho_3 \rho_1 = \sigma_3 \rho_2 - \sigma_3 \rho_2 = 0.$$

Образующие Дирака удобно расположить в таблицу:

$\epsilon(4)$	ρ_1	ρ_2	ρ_3
σ_1	$\sigma_1 \rho_1$	$\sigma_1 \rho_2$	$\sigma_1 \rho_3$
σ_2	$\sigma_2 \rho_1$	$\sigma_2 \rho_2$	$\sigma_2 \rho_3$
σ_3	$\sigma_3 \rho_1$	$\sigma_3 \rho_2$	$\sigma_3 \rho_3$

(4.5.36)

Прием, с помощью которого Дирак получил образующие для четырехрядных матриц из образующих для двухрядных, имеет важное значение в приложениях и в физической литературе называется *maggiage* (сочетание). Следующий пример, где применяется тот же прием, важен для дальнейшего.

(h) $n = 6$. Из двухрядных матриц $\sigma_i(2)$ — образующих алгебры $ASU(2)$ — и трехрядных матриц Гелл-Манна $\lambda_i(3)$ — образующих $ASU(3)$ — можно получить образующие $ASU(6)$ следующим образом (Гюрши, 1964 г.)

Построим сначала матрицы

$$\lambda_i(6) = \epsilon(2) \otimes \lambda_i(3) \quad (i = 1, \dots, 8),$$

$$\sigma_i(6) = \sigma_i(2) \otimes \epsilon(3) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Тогда таблица

$\epsilon(6)$	$\sigma_1(6)$	$\sigma_2(6)$	$\sigma_3(6)$
$\lambda_1(6)$	$\lambda_1(6) \sigma_1(6)$	$\lambda_1(6) \sigma_2(6)$	$\lambda_1(6) \sigma_3(6)$
...	...	$\lambda_i(6) \sigma_2(6)$...
$\lambda_8(6)$	$\lambda_8(6) \sigma_1(6)$	$\lambda_8(6) \sigma_2(6)$	$\lambda_8(6) \sigma_3(6)$

(4.5.37)

содержит 36 образующих алгебры $AU(6)$. Можно показать, что эти образующие независимы; каждая шестирядная эрмитова матрица разлагается по ним однозначно с действительными коэффициентами. Для $AGL(6, C)$ можно взять те же образующие с комплексными коэффициентами; для бесследных матриц исключается образующая $\epsilon(6)$.

Удобнее, впрочем, задать для $ASU(2)$ и $ASU(3)$ «внешние» образующие Окубо a_h^i, A_m^l ; полагая

$$A_k^i(6) = \epsilon(2) \otimes A_k^i, \quad a_k^i(6) = a_k^i \otimes \epsilon(3),$$

получаем таблицу образующих для $AGL(6)$:

$\epsilon(6)$...	$a_k^i(6)$...
\vdots			
$A_m^l(6)$...	$A_m^l(6) a_k^i(6)$...
\vdots			

(4.5.38)

Шестирядные эрмитовы матрицы разлагаются по этим образующим с комплексными коэффициентами, подчиненными некоторым соотношениям. Эта алгебра Ли будет дальше изучена подробнее.

§ 4.6. Связь между группами и алгебрами Ли

Экспоненциальное отображение. Переход от групп Ли к алгебрам Ли представляет собой некоторое обобщение логарифмирования чисел, превращающего умножение в сложение. Приведем сначала построение «показательной функции» от матрицы и от оператора. Если C_i^j — n -рядная комплексная матрица, то определены ее степени C^2, C^3, \dots ; обозначим через $(j|C^k|i)$ элементы матрицы C^k

Тогда для любых i, j , как можно показать, ряд

$$\delta_i^j + (j|C|i) + \frac{1}{2!} (j|C^2|i) + \dots + \frac{1}{k!} (j|C^k|i) + \dots \quad (4.6.1)$$

сходится; обозначим его сумму E_i^j . Матрица E_i^j называется *экспоненциалом* матрицы C_i^j : $E = e^C$. Разложение (4.6.1) можно записать в матричном виде (подразумевая, что суммирование производится отдельно для каждого матричного элемента (i, j)):

$$E = e^C = \epsilon(n) + C + \frac{1}{2!} C^2 + \dots + \frac{1}{k!} C^k + \dots \quad (4.6.2)$$

Пусть теперь C — оператор, действующий в $C(n)$. Тогда в базисах e и e' имеем матрицы $C_e, C_{e'}$, изображающие оператор C ; построим

$$E_e = \epsilon(n) + C_e + \frac{1}{2!} C_e^2 + \dots + \frac{1}{k!} C_e^k + \dots,$$

$$E_{e'} = \epsilon(n) + C_{e'} + \frac{1}{2!} C_{e'}^2 + \dots + \frac{1}{k!} C_{e'}^k + \dots$$

Как мы знаем (1.2.19), матрицы $C_e, C_{e'}$ подобны:

$$C_{e'} = UC_eU^{-1},$$

где U — некоторая унитарная матрица. Легко проверить, что

$$(C_{e'})^k = (UC_eU^{-1})(UC_eU^{-1}) \dots (UC_eU^{-1}) = U(C_e)^kU^{-1},$$

откуда

$$E_{e'} = UE_eU^{-1}.$$

Итак, матрица $E_{e'}$ изображает в базисе e' тот же оператор, который матрица E_e изображает в базисе e . Тем самым определен некоторый оператор E , однозначно соответствующий оператору C ; обозначим его через e^C . Тогда (4.6.2) можно рассматривать как символическое определение оператора E . Нетрудно доказать следующие свойства

экспоненциального отображения:

$$1. \det(e^C) = e^{\text{Sp}C}; \quad (4.6.3)$$

$$2. \text{каков бы ни был } C, e^C \text{ всегда — обратимый оператор}; \quad (4.6.4)$$

$$3. \text{если } CD = DC, \text{ то } e^{C+D} = e^C e^D; \quad (4.6.5)$$

$$4. e^{C^\dagger} = (e^C)^\dagger. \quad (4.6.6)$$

Оказывается, что все операторы, близкие к $\epsilon(n)$, имеют «логарифмы», которые являются малыми операторами.

Чтобы точно формулировать соответствующее предложение, введем понятие окрестности оператора, обобщающее данное в § 4.1.

Пусть B — произвольный оператор, действующий в $C(n)$ (может быть, и необратимый, в частности, нулевой). Пусть задано n^2 функций вида $C_i^j(t_1^1, t_2^1, \dots, t_n^n)$, определенных и непрерывных в кубе

$$|t_l^k| < \epsilon, \quad k, l = 1, \dots, n.$$

Тогда каждому набору (t_l^k) соответствует матрица C_i^j и, при некотором фиксированном базисе, оператор. Пусть различным наборам соответствуют разные операторы, а нулевому набору $(0, 0, \dots, 0)$ — данный оператор B . Тогда операторы $C_i^j(t_l^k)$ составляют *окрестность* оператора B .

Заметим, что в отличие от § 4.1 здесь параметризуются *все* операторы, близкие к B (а не только принадлежащие к некоторой группе). «Кубическая» окрестность вида (4.1.9) получается, в частности, при

$$C_i^j(t_l^k) = B_i^j + t_l^j.$$

Имея в виду окрестности общей «формы», можно доказать следующее:

Существуют такая окрестность O_ϵ единичного оператора $\epsilon(n)$ и такая окрестность O_n нулевого оператора, что (4.6.2) устанавливает взаимно однозначное соответствие между операторами C из O_n и E из O_ϵ .

Предполагая, что E лежит в указанной окрестности O_ϵ , можно сопоставить E один и только один оператор C из O_n такой, что $e^C = E$. Этот оператор можно назвать

логарифмом E :

$$C = \ln E. \quad (4.6.7)$$

(Заметим, что операторам, «далеким» от $\epsilon(n)$, нельзя поставить в соответствие единственный логарифм; например, операторы $z \cdot \epsilon(n)$, где z — комплексное число, имеют «логарифмами» все операторы вида

$$[\ln |z| + i(\arg z + 2\pi ki)] \epsilon(n), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

однозначный выбор аргумента z возможен лишь для z , близких к единице.)

Для каждого обратимого оператора E существует такой оператор C (не однозначно определенный), что $e^C = E$; доказательство мы опускаем.

Покажем, что если A — эрмитов оператор, то e^{iA} — унитарный оператор; если A — бесследный оператор, то e^{iA} — унимодулярный оператор.

В самом деле, если A — эрмитов оператор, то $(iA)(iA)^+ = (iA)^+(iA)$ и, согласно (4.6.5),

$$e^{iA+(iA)^+} = e^{iA}e^{(iA)^+}.$$

Так как $(iA)^+ = -iA$, из (4.6.6) следует

$$e^{iA}(e^{iA})^+ = \epsilon(n).$$

Значит, $(e^{iA})^+ = (e^{iA})^{-1}$, и e^{iA} — унитарный оператор.

Можно показать, что *каждый* унитарный оператор имеет вид

$$U = e^{iA}, \quad A^+ = A. \quad (4.6.8)$$

Это равенство аналогично представлению комплексного числа z с модулем 1 в виде $e^{i\alpha}$, где α — действительное число. Если, далее, $\text{Sp } A = 0$, то из (4.6.3) вытекает, что $\det e^{iA} = 1$. В общем случае $A = A_0 + A_1$, где

$$\text{Sp } A_0 = 0, \quad \text{Sp } A_1 = \text{Sp } A, \quad A_1 = \text{Sp } A \cdot \epsilon(n).$$

Отсюда $e^{iA} = e^{iA_0}e^{iA_1}$, $e^{iA} = e^{i \text{Sp } A} e^{iA_0}$, где e^{iA_0} — унимодулярный оператор.

Если $U = e^{iA}$ — унитарный оператор, получаем его каноническое представление через унимодулярный:

$$U = \det U \cdot U_0. \quad (4.6.9)$$

Посмотрим теперь, насколько экспоненциальное отображение операторов похоже на показательную функцию от числа.

Условие (4.6.5) означает, что если слагаемые A, B коммутируют, то показательное отображение переводит сумму в произведение, что соответствует основному свойству показательной функции. Это свойство не верно для произвольных операторов A, B . Если A и B не коммутируют и t мало, то с точностью первого порядка

$$\left. \begin{aligned} e^{itA} &= \epsilon(n) + itA, & e^{itB} &= \epsilon(n) + itB, \\ e^{it(A+B)} &= \epsilon(n) + it(A+B) = e^{itA} e^{itB}. \end{aligned} \right\} \quad (4.6.10)$$

С точностью второго порядка

$$\left. \begin{aligned} e^{itA} &= \epsilon(n) + itA - \frac{1}{2} t^2 A^2, & e^{itB} &= \epsilon(n) + itB - \frac{1}{2} t^2 B^2, \\ e^{it(A+B)} &= \epsilon(n) + it(A+B) - \frac{1}{2} t^2 (A^2 + AB + BA + B^2), \\ e^{itA} e^{itB} &= \epsilon(n) + it(A+B) - \frac{1}{2} t^2 (A^2 + 2AB + B^2), \\ e^{it(A+B)} e^{-itB} e^{-itA} &= \epsilon(n) + \frac{1}{2} t^2 [A, B]. \end{aligned} \right\} \quad (4.6.11)$$

Далее, сохраняя в разложениях члены до второго порядка, нетрудно проверить формулу

$$e^{itA} e^{itB} e^{-itA} e^{-itB} = e^{-t^2 [A, B]}. \quad (4.6.12)$$

Группы Ли и алгебры Ли. Теперь мы можем установить связь между группами и алгебрами Ли.

При этом мы ограничимся лишь теми группами и алгебрами, которые представляют интерес для дальнейшего изложения. Точнее, мы будем говорить, что алгебра Ли \mathbf{A} и группа Ли G экспоненциально связаны, если между их операторами существует соотношение: когда A пробегает алгебру Ли, $U = e^{iA}$ пробегает соответствующую ей группу Ли.

Таблица 4.1 содержит примеры такого соответствия. Заметим, что размерность группы Ли, как можно показать, совпадает с числом линейно независимых

Таблица 4.1

Группа Ли	Размерность	Матрицы группы Ли	Алгебра Ли	Матрицы алгебры Ли
$GL(n, C)$ Полная линейная	$2n^2$	Обратимые: $\det \neq 0$	$AGL(n, C)$	Все
$GL(n, R)$ Действительная линейная	n^2	Действительные с $\det \neq 0$	$AGL(n, R)$	Чисто мнимые
$SL(n, C)$ Специальная линейная или унимодулярная	$2n^2 - 2$	Унимодулярные: $\det = 1$	$ASL(n, C)$	Бесследные: $Sp = 0$
$SL(n, R)$ Специальная действительная линейная	$n^2 - 1$	Действительные с $\det = 1$	$ASL(n, R)$	Чисто мнимые, $Sp = 0$
$SO(n)$ Специальная ортогональная	$\frac{n(n-1)}{2}$	Действительные: $\sum_j O_i^j O_k^j = \delta_{ik}$	$ASO(n)$	Чисто мнимые эрмитовы: $A_j^i + A_i^j = 0,$ $\text{Re } A_j^i = 0$
$U(n)$ Унитарная	n^2	Унитарные: $\sum_j \bar{U}_i^j U_k^j = \delta_{ik}$	$AU(n)$	Эрмитовы: $A_j^i - \bar{A}_i^j = 0$
$SU(n)$ Специальная унитарная	$n^2 - 1$	Унитарные унимодулярные: $\sum_j \bar{U}_i^j U_k^j = \delta_{ik},$ $\det = 1$	$ASU(n)$	Эрмитовы бесследные: $A_j^i - \bar{A}_i^j = 0,$ $Sp = 0$

образующих соответствующей алгебры Ли. (Группа $O(n)$, состоящая из двух связанных компонент, не может быть в целом связана со своей алгеброй Ли экспоненциальным отображением и потому не включена в таблицу.) Указанная нами связь между группами и алгебрами Ли в общем случае носит локальный характер, т. е. относится к окрестностям единичного и нулевого элемента (см. выше).

Подгруппы и подалгебры. Пусть \mathbf{A}' — алгебра Ли, G' — соответствующая ей группа Ли, экспоненциально связанная с \mathbf{A}' , \mathbf{A} — подалгебра \mathbf{A}' . Тогда для всевозможных операторов A из \mathbf{A} операторы e^{iA} , как можно показать, образуют группу (примеры можно найти в предыдущей таблице). Эта группа G является подгруппой G' . Обратно, если дана подгруппа G группы G' , то в алгебре \mathbf{A}' , как можно показать, существует подалгебра \mathbf{A} , с которой экспоненциально связана подгруппа G .

Часто подалгебру Ли \mathbf{A} задают, выделив часть образующих \mathbf{A}' , для которых коммутаторы выражаются через те же образующие. Если известна группа Ли G_1 , в алгебре Ли которой перестановочные соотношения имеют такой же вид, то подгруппа G группы G' , экспоненциально связанная с \mathbf{A} , и группа G_1 имеют изоморфные алгебры Ли. В некоторых случаях отсюда можно заключить, что G и G_1 изоморфны. Если, например, G' есть одна из групп $SU(n)$ ($n \geq 2$), а G_1 изоморфна $SU(n)$ с тем же n , то в описанной выше ситуации подгруппа G совпадает с G' (и, стало быть, изоморфна G_1).

Таким образом, по виду перестановочных соотношений для подалгебры Ли можно в некоторых случаях определить строение соответствующей подгруппы. Этот прием будет часто использоваться в дальнейшем.

Комментарии

В общем случае каждой группе Ли можно поставить в соответствие некоторую алгебру Ли, причем всякая алгебра Ли может быть получена с помощью этого соответствия. Однако две группы Ли с изоморфными алгебрами Ли не всегда изоморфны, а могут быть связаны более сложным образом (см. соотношение между группами $SU(2)$ и $SO(3)$ в § 7.2).

§ 4.7. Представления алгебр Ли

Пусть \mathbf{A} — алгебра Ли. Говорят, что дано k -рядное представление алгебры \mathbf{A} (или гомоморфизм \mathbf{A} в алгебру $AGL(k, C)$), если каждому оператору A из \mathbf{A} поставлен в соответствие некоторый оператор $\tilde{P}(A)$, действующий в $C(k)$, причем сумме, кратному и коммутатору операторов из \mathbf{A} соответствуют сумма, кратное и коммутатор операторов в $C(k)$:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{P}(A+B) &= \tilde{P}(A) + \tilde{P}(B), \\ \tilde{P}(\lambda A) &= \lambda \tilde{P}(A), \\ \tilde{P}\left(\frac{1}{i}[A, B]\right) &= \frac{1}{i}[\tilde{P}(A), \tilde{P}(B)]. \end{aligned} \right\} \quad (4.7.1)$$

Определение представления алгебры Ли следует сравнить с определением представления группы Ли в § 4.3

Все операторы вида $\tilde{P}(A)$, где A пробегает алгебру \mathbf{A} , составляют также некоторую алгебру Ли — подалгебру $AGL(k, C)$. Как мы увидим, в теории элементарных частиц чаще всего работают с представлениями алгебр Ли. Но отдельное изучение таких представлений нам не понадобится ввиду их связи с представлениями групп Ли, которая сейчас будет изложена. Мы укажем закон, по которому представление группы Ли порождает представление соответствующей ей алгебры Ли. Можно показать, что все представления алгебр Ли могут быть получены таким способом.

Итак, пусть задано представление P группы Ли G k -рядными операторами; представляющую группу обозначим, как в § 4.3, через $P(G)$. Алгебру Ли, соответствующую группе G , обозначим через AG .

Пусть A — оператор из AG ; тогда e^{iA} принадлежит G . Рассмотрим однопараметрическую подгруппу G , состоящую из операторов e^{itA} , где t — действительное число. Так как

$$P(e^{it_1A}) P(e^{it_2A}) = P(e^{it_1A} e^{it_2A}) = P(e^{i(t_1+t_2)A}),$$

операторы $P(e^{itA})$ тоже образуют однопараметрическую подгруппу (группы $P(G)$). Можно показать, что в алгебре Ли группы $P(G)$ существует один, и только один,

оператор \tilde{A} , порождающий эту подгруппу, т. е. удовлетворяющий тождеству

$$P(e^{itA}) = e^{it\tilde{A}}. \quad (4.7.2)$$

Не приводя строгого доказательства этого утверждения, мы ограничимся замечанием, что \tilde{A} есть коэффициент при it в разложении по степеням t оператора $P(e^{itA})$. При этом очевидно, что (4.7.2) справедливо с точностью до малой высшего порядка относительно t .

Положим

$$\tilde{A} = \tilde{P}(A). \quad (4.7.3)$$

\tilde{P} и есть представление алгебры Ли, порожденное заданным представлением P группы Ли. Можно показать, что \tilde{P} удовлетворяет определению представления (4.7.1). В следующих (нестрогих) вычислениях мы проверим это, пренебрегая малыми высших порядков относительно t . Если

$$P(e^{itA}) = e^{it\tilde{A}}, \quad P(e^{itB}) = e^{it\tilde{B}},$$

то по определению представления группы

$$P(e^{it(A+B)}) = P(e^{itA} e^{itB}) = P(e^{itA}) P(e^{itB})$$

(ср. (4.6.11)).

В силу (4.7.2) отсюда следует

$$e^{it(\tilde{A}+\tilde{B})} = e^{it\tilde{A}} e^{it\tilde{B}} = e^{it(\tilde{A}+\tilde{B})}$$

и тем самым

$$\tilde{P}(A+B) = \tilde{P}(A) + \tilde{P}(B).$$

Аналогично доказывается второе соотношение (4.7.1). Наконец, полагая

$$\frac{1}{i}[A, B] = C, \quad \frac{1}{i}[\tilde{P}(A), \tilde{P}(B)] = D, \quad \sqrt{t} = s,$$

получаем с помощью (4.6.12):

$$\begin{aligned} e^{it\tilde{P}(C)} &= P(e^{itC}) = P(e^{-s^2[A, B]}) = \\ &= P(e^{-isA} e^{isB} e^{isA} e^{-isB}) = P(e^{is(-A)}) P(e^{isB}) P(e^{isA}) P(e^{is(-B)}) = \\ &= e^{-is\tilde{P}(A)} e^{is\tilde{P}(B)} e^{is\tilde{P}(A)} e^{-is\tilde{P}(B)} = e^{is^2 D} = e^{itD}, \end{aligned}$$

откуда

$$\tilde{P}\left(\frac{1}{i}[A, B]\right) = \frac{1}{i}[\tilde{P}(A), \tilde{P}(B)].$$

На практике удобно находить оператор \tilde{A} следующим образом. Задают A , находят $P(e^{itA})$, пользуясь тем, что представление группы Ли известно, а затем разлагают $P(e^{itA})$ в ряд по степеням t ; тогда коэффициент при it и есть искомый оператор \tilde{A} .

Мы применим изложенный только что метод, чтобы вывести одну важную для дальнейшего формулу.

Пусть даны представления P, Q группы G в пространствах $C(k), C(l)$ и произведение $R = P \otimes Q$ этих представлений в пространстве $C(k) \otimes C(l)$ (см. (4.3.5)). Тогда в этом же пространстве определено представление \tilde{R} алгебры Ли AG . Мы хотим выразить представление \tilde{R} через представления \tilde{P}, \tilde{Q} .

Пусть A принадлежит AG ; тогда e^{itA} есть оператор группы G . По определению,

$$R(e^{itA}) = P(e^{itA}) \otimes Q(e^{itA}). \quad (4.7.4)$$

Согласно (4.7.2) существуют такие операторы \tilde{A}_1, \tilde{A}_2 , что

$$P(e^{itA}) = e^{it\tilde{A}_1}, \quad Q(e^{itA}) = e^{it\tilde{A}_2}, \quad (4.7.5)$$

причем

$$\tilde{A}_1 = \tilde{P}(A), \quad \tilde{A}_2 = \tilde{Q}(A). \quad (4.7.6)$$

Точно так же

$$R(e^{itA}) = e^{it\tilde{A}}, \quad \tilde{A} = \tilde{R}(A). \quad (4.7.7)$$

В силу (4.7.5), (4.7.7), из (4.7.4) следует:

$$e^{it\tilde{A}} = e^{it\tilde{A}_1} \otimes e^{it\tilde{A}_2}.$$

Разлагая по степеням t , имеем:

$$\tilde{A} = \tilde{A}_1 \otimes \epsilon(l) + \epsilon(k) \otimes \tilde{A}_2 + tB(t),$$

где $B(t)$ — оператор, имеющий конечный предел при $t \rightarrow 0$.

Переходя к пределу и принимая во внимание (4.7.6), (4.7.7), мы приходим к искомой формуле:

$$\tilde{R}(A) = \tilde{P}(A) \otimes \epsilon(l) + \epsilon(k) \oplus \tilde{Q}(A). \quad (4.7.8)$$

Строение правой части этой формулы напоминает правило дифференцирования произведения. Обобщение (4.7.8) на тензорное произведение $R = P_1 \otimes \dots \otimes P_m$ любого числа представлений очевидно:

$$\begin{aligned} \tilde{R}(A) = & \tilde{P}_1(A) \otimes \epsilon(k_1) \otimes \dots \otimes \epsilon(k_m) + \\ & + \epsilon(k_1) \otimes \tilde{P}_2(A) \otimes \dots \otimes \epsilon(k_m) + \dots + \\ & + \epsilon(k_1) \otimes \epsilon(k_2) \otimes \dots \otimes \tilde{P}_m(A). \end{aligned} \quad (4.7.9)$$

Пусть теперь дано произвольное унитарное представление P группы Ли G в любом комплексном евклидовом пространстве. Построим соответствующее представление \tilde{P} алгебры Ли AG в том же пространстве. Тогда все операторы \tilde{A} из $\tilde{P}(AG)$, согласно (4.7.2), задаются тождеством

$$P(e^{itA}) = e^{it\tilde{A}},$$

причем оператор $e^{it\tilde{A}}$ унитарен, по предположению. В силу (4.6.6)

$$(e^{it\tilde{A}})^{\dagger} = e^{(it\tilde{A})^{\dagger}} = e^{-it\tilde{A}^{\dagger}}.$$

С другой стороны, в силу (4.6.5)

$$(e^{it\tilde{A}})^{-1} = e^{-it\tilde{A}}.$$

Ввиду унитарности $e^{it\tilde{A}}$ имеем

$$e^{-it\tilde{A}^{\dagger}} = e^{-it\tilde{A}};$$

следовательно, $\tilde{A}^{\dagger} = \tilde{A}$. Итак, для унитарного представления группы Ли представляющие операторы алгебры Ли эрмитовы.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП $SU(n)$

Излагаемый в этой главе тензорный метод построения представлений групп принадлежит И. Шуру (1901 г.)

§ 5.1. Представления $SU(2)$

Напомним, что группа $SU(2)$ состоит из унитарных унимодулярных операторов в двумерном комплексном евклидовом пространстве $C(2)$ или — в матричной форме — из матриц вида

$$\begin{bmatrix} U_1^1 & U_2^1 \\ U_1^2 & U_2^2 \end{bmatrix}, \quad (5.1.1)$$

где

$$|U_1^1|^2 + |U_2^1|^2 = 1, \quad |U_1^2|^2 + |U_2^2|^2 = 1, \quad (5.1.2)$$

$$\bar{U}_1^1 U_1^2 + \bar{U}_2^1 U_2^2 = 0, \quad U_1^1 U_2^2 - U_2^1 U_1^2 = 1. \quad (5.1.3)$$

Для тех же матриц можно получить и более простую форму; положим $U_1^1 = \alpha$, $U_2^1 = \beta$. Первое условие (5.1.3) дает $U_1^2 = -k\bar{U}_2^1$, $U_2^2 = k\bar{U}_1^1$, где k — некоторое число; согласно двум условиям (5.1.2) должно быть

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = |k\alpha|^2 + |k\beta|^2 = 1,$$

откуда $|k| = 1$, $k = e^{i\varphi}$, где φ действительно. Поэтому

$$U_1^2 = -e^{i\varphi}\bar{\beta}, \quad U_2^2 = e^{i\varphi}\bar{\alpha}.$$

Далее,

$$U_1^1 U_2^2 - U_2^1 U_1^2 = e^{i\varphi}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta}),$$

и из (5.1.3) следует, что $e^{i\varphi} = 1$,

$$\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1. \quad (5.1.4)$$

Итак, матрицы группы $SU(2)$ имеют вид

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}, \quad (5.1.5)$$

где α, β — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие соотношению (5.1.4). Мы убеждаемся снова, что группа $SU(2)$ трехмерна (ср. § 4.2).

Векторы пространства $C(2)$ называются *спинорами*, а тензоры над пространством $C(2)$ — *спинтензорами*. Действие оператора из группы $SU(2)$ на спинор описывается в координатах уравнениями

$$x^{1'} = \alpha x^1 + \beta x^2, \quad x^{2'} = -\bar{\beta} x^1 + \bar{\alpha} x^2. \quad (5.1.6)$$

Построение представлений. Рассмотрим пространство $C(p, 0)$ всех контравариантных тензоров ранга p . Как мы знаем (см. § 3.3), каждому оператору L , действующему в $C(2)$, соответствует оператор $\bar{L} = \Pi L$, действующий в пространстве $C(p, 0)$; в частности, если U — оператор из группы $SU(2)$, то в силу (3.3.12) $\bar{U} = P(U)$ — унитарный оператор и в силу (3.3.10), (3.3.11) мы получаем унитарное представление группы $SU(2)$. Легко показать, что представляющие операторы не только унитарны, но и унимодулярны. В самом деле, их матрицы суть p -ые кронекеровы степени унимодулярных унитарных матриц; при надлежащем выборе базиса унитарная унимодулярная матрица имеет диагональный вид, и из формулы (2.4.2) легко усмотреть, что определитель любой ее кронекеровой степени равен единице. Итак, $\Pi(SU(2))$ есть подгруппа группы $SU(r)$, где r — размерность пространства $C(p, 0)$. (Заметим, что это рассуждение непосредственно распространяется на представления любой группы $SU(n)$.)

Представление Π , как легко видеть, приводимо; в самом деле, мы сейчас укажем подпространство $C(p, 0)$, инвариантное относительно группы $\Pi(SU(2))$.

Неприводимые представления. Рассмотрим подпространство $\text{Sym}(p, 0)$ всех *симметрических* тензоров про-

пространства $C(p, 0)$ (см. § 3.6). Согласно (3.6.10) его размерность

$$\dim \text{Sym}(p, 0) = p + 1. \quad (5.1.7)$$

Покажем, что $\text{Sym}(p, 0)$ инвариантно относительно всех операторов \bar{U} , где U принадлежит $SU(2)$.

В самом деле, согласно (3.3.9) действие \bar{U} в $C(p, 0)$ описывается формулой

$$T'^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = U_{\beta_1}^{\alpha_1} U_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots U_{\beta_p}^{\alpha_p} T^{\beta_1 \dots \beta_p}. \quad (5.1.8)$$

Применяя U к тензору sT и обозначая через $s_\alpha, s_\beta^{-1}, \dots$ подстановки над индексами α, β, \dots , имеем (см. (3.6.4)):

$$\begin{aligned} (sT)^{\alpha_1 \dots \alpha_p} &= U_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots U_{\beta_p}^{\alpha_p} (sT)^{\beta_1 \dots \beta_p} = U_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots U_{\beta_p}^{\alpha_p} T^{s(\beta_1 \dots \beta_p)} = \\ &= s_\beta^{-1} (U_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots U_{\beta_p}^{\alpha_p}) T^{\beta_1 \dots \beta_p} = s_\alpha (s_\alpha^{-1} s_\beta^{-1}) (U_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots U_{\beta_p}^{\alpha_p}) T^{\beta_1 \dots \beta_p} = \\ &= s_\alpha (U_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots U_{\beta_p}^{\alpha_p}) T^{\beta_1 \dots \beta_p} = T'^{s(\alpha_1 \dots \alpha_p)} = (sT')^{\alpha_1 \dots \alpha_p}, \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

т. е.

$$(sT)' = sT' \quad (5.1.10)$$

или, что то же,

$$\bar{U}sT = s\bar{U}T. \quad (5.1.11)$$

Если, в частности, T — симметрический тензор, $sT = T$, то

$$s\bar{U}T = \bar{U}T, \quad (5.1.12)$$

и тензор $\bar{U}T$ также симметрический.

Итак, пространство $\text{Sym}(p, 0)$ инвариантно относительно группы $\Pi SU(2)$ и представление Π приводимо.

Построим теперь новое представление группы $SU(2)$ — ограничение представления Π на подпространстве $\text{Sym}(p, 0)$. Для этого обозначим через \bar{U}_{Sym} оператор \bar{U} , рассматриваемый как преобразование пространства $\text{Sym}(p, 0)$, т. е. применяемый только к симметрическим тензорам. Так как размерность $\text{Sym}(p, 0)$ равна $p + 1$, соответствие $U \rightarrow \bar{U}_{\text{Sym}}$ задает некоторое

$(p + 1)$ -рядное представление группы $SU(2)$, которое мы обозначим также через $\text{Sym}(p, 0)$.

Скалярное представление, совпадающее для группы $SU(2)$ с тривиальным (§ 4.3), мы также формально включим в изложенную схему, обозначив его через $\text{Sym}(0, 0)$; будем считать, что это представление соответствует типу тензоров T «без индексов», или «нулевой валентности», имеющих одну и ту же (единственную) координату в любом базисе (такой тензор можно отождествить с комплексным числом).

Можно доказать, что при всех p представления $\text{Sym}(p, 0)$ неприводимы, т. е. $\text{Sym}(p, 0)$ не содержит уже никакого подпространства меньшей размерности, инвариантного относительно всех операторов \bar{U} . Таким образом, $SU(2)$ имеет неприводимые представления любой степени. Далее, можно доказать, что всякое неприводимое представление группы $SU(2)$ эквивалентно (ср. § 4.3) одному из представлений $\text{Sym}(p, 0)$; иначе говоря, с точностью до эквивалентности только что изложенный «тензорный» подход позволяет найти все неприводимые представления. Как мы знаем (§ 4.3), любое представление группы $SU(n)$ разлагается на неприводимые, так что представления $SU(2)$ построены полностью.

Комментарии

Доказательство фактов, на которые мы здесь ссылаемся (неприводимости представлений и полноты найденной системы представлений), опирается на сложные математические методы и не может быть здесь приведено. В дальнейшем в аналогичных случаях мы также ограничимся описанием приемов, позволяющих получить полную систему неприводимых представлений, но не будем доказывать, что полученные представления неприводимы и что других неприводимых представлений не существует.

Для построения представлений мы воспользовались симметрическими тензорами; «тип симметрии», который они представляют, — простейший возможный (мы не даем пока определения «типа симметрии» в общем случае). Этот тип симметрии тензоров ранга p символически изображается

схемой Юнга — строкой из p квадратов:

$$\left[\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \right] \quad (5.1.13)$$

Этой строке соответствует p индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, которые можно расставить в ее квадратах. Полезность такого изображения в этом простейшем случае не видна, и мы приводим его лишь для полноты (представления *всех* групп $SU(n)$, как мы увидим, задаются схемами Юнга). Тип симметрии T (валентности нуль) изображается «пустой» схемой Юнга (без клеток).

§ 5.2. Представления $SU(3)$

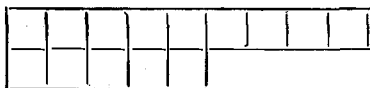
Группа $SU(3)$ состоит из унитарных унимодулярных операторов в трехмерном комплексном евклидовом пространстве $C(3)$. Размерность этой группы равна $3^2 - 1$, т. е. восьми (см. § 4.2 (g)). Операторы из $SU(3)$ действуют на векторы пространства $C(3)$. Группа $SU(3)$ играет особую важную роль в теории элементарных частиц.

Рассмотрим пространство $C(p, 0)$ всех контравариантных тензоров ранга p . Если U принадлежит $SU(3)$, то соответствующий оператор \bar{U} действует в пространстве $C(p, 0)$; он унитарен, как доказано в § 3.3, и унимодулярен (доказательство проводится так же, как в § 5.1). Тем самым определяется некоторое представление Π группы $SU(3)$; как мы увидим, это представление всегда приводимо.

В самом деле, точно так же как в § 5.1, доказывалось, что подпространство симметрических тензоров $\text{Sym}(p, 0)$ инвариантно относительно группы $\Pi SU(3)$. Полученные таким образом представления неприводимы, но, в отличие от § 5.1, не исчерпывают *всех* неприводимых представлений группы $SU(3)$. Чтобы получить все такие представления, надо подробнее исследовать свойства симметрии тензоров над пространством $C(3)$.

Типы симметрии тензоров. Построим сначала схемы Юнга для группы $SU(3)$. Этим схемы имеют вид таблиц

из двух строк, составленных из квадратов:



(5.2.1)

Схему, в которой $p + q$ квадратов в первой строке и q — во второй, обозначим через (p, q) .

Рассмотрим пространство $C(p + 2q, 0)$ контравариантных тензоров ранга $p + 2q$. Будем говорить, что тензор T симметричен относительно некоторой группы индексов, если для каждой подстановки индексов s , оставляющей неподвижными все не входящие в группу индексы, $sT = T$. Например, тензор $T^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5}$ симметричен относительно первых трех индексов, если

$$\begin{aligned} T^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5} &= T^{\alpha_1\alpha_3\alpha_2\alpha_4\alpha_5} = T^{\alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_4\alpha_5} = \\ &= T^{\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_5} = T^{\alpha_3\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_5} = T^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_4\alpha_5}. \end{aligned}$$

Если (как часто случается) индексы, относительно которых тензор симметричен, расположены рядом, мы будем выделять их фигурными скобками:

$$T^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\}\alpha_4\alpha_5}. \quad (5.2.2)$$

Далее, будем говорить, что тензор T антисимметричен относительно пары индексов α_i, α_j , если подстановка (транспозиция) s_{ij} , меняющая местами α_i, α_j и не меняющая остальных индексов, изменяет знак тензора: $s_{ij}T = -T$. Например, тензор $T^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5}$ антисимметричен относительно α_4, α_5 , если

$$T^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5\alpha_4} = -T^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5}.$$

Если индексы α_i, α_j расположены рядом, антисимметричность по этим индексам обозначается квадратными скобками:

$$T^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3[\alpha_4\alpha_5]}.$$

Поставим теперь в соответствие каждой схеме Юнга (p, q) подпространство $C_{p,q}$ пространства $C(p + 2q, 0)$,

состоящее из всех тензоров

$$T^{(\alpha_1 \dots \alpha_p) [\gamma_1 \delta_1] [\gamma_2 \delta_2] \dots [\gamma_q \delta_q]} \quad (5.2.3)$$

со следующими свойствами симметрии:

1. T симметричен относительно индексов $\alpha_1 \dots \alpha_p$;
2. T антисимметричен относительно каждой пары индексов $[\gamma_i, \delta_i]$;
3. T симметричен относительно пар $[\gamma_i, \delta_i]$ (т. е. для любой подстановки s , переводящей каждую из этих пар в другую пару, $sT = T$).

Формула (5.1.11) показывает, что $C_{p,q}$ инвариантно относительно группы $\Pi SU(3)$ (Π — представление $SU(3)$ операторами, действующими в $C(p+2q, 0)$). Однако полученное таким образом представление $SU(3)$ в $C_{p,q}$ оказывается, вообще говоря, приводимым, и нужно дальнейшее сужение пространства.

Неприводимые представления. Заметим, что *всякое* подпространство может быть описано линейными уравнениями, связывающими координаты; мы определим сейчас коэффициенты нужных нам линейных соотношений.

Построим систему чисел

$$\epsilon_{\rho\sigma\tau} = \epsilon^{\rho\sigma\tau} = \begin{cases} 0, & \text{если индексы } \rho, \sigma, \tau \text{ не все различны;} \\ 1, & \text{если подстановка } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma, \rho, \tau \end{pmatrix} \text{ четна;} \\ -1, & \text{если эта подстановка нечетна.} \end{cases} \quad (5.2.4)$$

По виду запись $\epsilon_{\rho\sigma\tau}$ напоминает тензор; однако, если истолковать числа $\epsilon_{\rho\sigma\tau}$ как координаты некоторого тензора в базисе e , то при переходе к базису e' с помощью унитарного оператора U^{-1} (см. (3.4.4), (3.4.8)) получим координаты того же тензора в базисе e' :

$$\epsilon'_{\rho\sigma\tau} = (U^{-1})_{\rho}^{\lambda} (U^{-1})_{\sigma}^{\mu} (U^{-1})_{\tau}^{\nu} \epsilon_{\lambda\mu\nu} = \det U^{-1} \cdot \epsilon_{\rho\sigma\tau}. \quad (5.2.5)$$

Таким образом, если сопоставить каждой системе координат числа $\epsilon_{\rho\sigma\tau}$, то мы *не получим* координат тензора; множитель $\det U^{-1}$ лишь по модулю равен единице. (Иногда говорят, что $\epsilon_{\rho\sigma\tau}$ суть координаты «псевдотен-

зора», но мы не будем вводить этого понятия.) Из (5.2.5) вытекает, что уравнения вида

$$\epsilon_{\rho\sigma\tau} T^{\dots\rho\dots\sigma\dots\tau\dots} = 0, \quad (5.2.6)$$

связывающие координаты тензора, имеют инвариантный характер: такие уравнения, записанные в любых двух системах координат, равносильны. Каждому выбору индексов ρ, σ, τ (точнее, мест этих индексов) соответствует уравнение вида (5.2.6).

Покажем, что подпространство $C_{p,q}^0$ всех тензоров из $C_{p,q}$, удовлетворяющих уравнениям (5.2.6) при любом выборе индексов ρ, σ, τ , инвариантно относительно всех операторов \bar{U} . В самом деле, обозначим через s_j всевозможные подстановки, меняющие местами индексы ρ, σ, τ и не меняющие остальных индексов; пусть $\text{Sgn } s$ равен 1, если подстановка s четна, и -1 в противном случае. Тогда уравнение (5.2.6) можно переписать в виде

$$\sum_j \text{Sgn } s_j \cdot (s_j T)^{\dots 1 \dots 2 \dots 3 \dots} = 0$$

(см. (3.6.4)).

Пусть числа ρ, σ, τ различны и подстановка s_0 переводит 1, 2, 3, соответственно, в ρ, σ, τ , но не меняет индексов на остальных местах; тогда

$$\begin{aligned} \sum_j \text{Sgn } s_j \cdot (s_j T)^{\dots\rho\dots\sigma\dots\tau\dots} &= \sum_j \text{Sgn } s_j \cdot (s_j T)^{s_0(\dots 1 \dots 2 \dots 3 \dots)} = \\ &= \sum_j \text{Sgn } s_j \cdot (s_0 s_j T)^{\dots 1 \dots 2 \dots 3 \dots} = \\ &= \text{Sgn } s_0 \sum_j \text{Sgn } (s_0 s_j) \cdot (s_0 s_j T)^{\dots 1 \dots 2 \dots 3 \dots} = \\ &= \text{Sgn } s_0 \sum_j \text{Sgn } s_j \cdot (s_j T)^{\dots 1 \dots 2 \dots 3 \dots} = 0. \end{aligned}$$

Пусть, далее, по крайней мере два из индексов ρ, σ, τ , например, ρ и σ , принимают равные значения; обозначим через s' подстановку, меняющую местами ρ, σ и не меняющую остальных индексов. Ясно, что подстановка s'

нечетна. Пусть s'_k суть все четные подстановки (из числа введенных выше s_j); тогда все нечетные имеют вид $s'_k s'$; причем

$$(s'_k s' T)^{\dots \rho \dots \sigma \dots \tau \dots} = (s'_k T)^{\dots \rho \dots \sigma \dots \tau \dots}.$$

Поэтому, принимая во внимание нечетность s' , получаем:

$$\begin{aligned} \sum_j \text{Sgn } s_j \cdot (s_j T)^{\dots \rho \dots \sigma \dots \tau \dots} &= \\ &= \sum_k [\text{Sgn } s'_k \cdot (s'_k T)^{\dots \rho \dots \sigma \dots \tau \dots} + \text{Sgn } (s'_k s') \cdot (s'_k s' T)^{\dots \rho \dots \sigma \dots \tau \dots}] = \\ &= \sum_k (\text{Sgn } s'_k + \text{Sgn } s' \cdot \text{Sgn } s'_k) (s'_k T)^{\dots \rho \dots \sigma \dots \tau \dots} = 0. \end{aligned}$$

Итак, для любых значений индексов ρ, σ, τ (и любых значений других индексов, обозначенных многоточиями)

$$\sum_j \text{Sgn } s_j \cdot (s_j T)^{\dots \rho \dots \sigma \dots \tau \dots} = 0,$$

т. е.

$$\sum_j \text{Sgn } s_j \cdot s_j T = 0. \quad (5.2.7)$$

Соотношение (5.2.7) равносильно уравнению (5.2.6), и из него сразу следует инвариантность подпространства $C_{p,q}^0$. Действительно, согласно формуле (5.1.11),

$$\sum_j \text{Sgn } s_j \cdot s_j \bar{U} T = \sum_j \text{Sgn } s_j \cdot \bar{U} s_j T = \bar{U} \left(\sum_j \text{Sgn } s_j \cdot s_j T \right),$$

и если T удовлетворяет условию (5.2.7), то и $\bar{U} T$ удовлетворяет тому же условию.

Таким образом, $C_{p,q}^0$ инвариантно, и действие операторов \bar{U} в $C_{p,q}^0$ определяет некоторое представление $SU(3)$, соответствующее схеме Юнга (p, q) .

Скалярное представление можно формально включить в изложенную схему, считая, что оно соответствует тен-

зорам нулевой валентности T (скалярам). Можно доказать, что полученные представления при всех p, q неприводимы, и что все неприводимые представления группы $SU(3)$ эквивалентны представлениям только что описанного типа. Наконец, можно доказать, что различным схемам Юнга соответствуют неэквивалентные представления.

Степени представлений. Теперь нам надо определить размерности пространств $C_{p,q}^0$. При этом надо учесть, что не все уравнения вида (5.2.6) независимы от условий симметрии, уже ранее наложенных на тензор из $C_{p,q}$. Пусть, например, два из индексов ρ, σ, τ входят в группу $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ (см. (5.2.3)); тогда, обозначая через s' подстановку, меняющую местами эти индексы, мы можем повторить рассуждение, с помощью которого было выведено равенство (5.2.7) (записывая на этот раз нечетные подстановки в виде s'_k), и доказать, что соответствующее соотношение (5.2.6) выполняется автоматически для всех тензоров из $C_{p,q}$. Поэтому можно считать, что в уравнении (5.2.6) участвует не более одного из индексов α ; при этом, в силу симметрии T относительно индексов α , выбор индекса α не влияет на получаемые соотношения. Легко показать также, что автоматически выполняются соотношения (5.2.6), в которые входят три скобки $[\gamma\delta]$ (см. свойства симметрии 2 и 3). Таким образом, достаточно изучить соотношения (5.2.6) для тензоров строения

$$T^{\alpha[\gamma_1\delta_1][\gamma_2\delta_2]}. \quad (5.2.8)$$

Надо рассмотреть следующие случаи (мы приводим результаты, предоставляя проверку в качестве упражнения читателю):

(а) Соотношения вида

$$\epsilon_{\rho\sigma\tau} T^{\alpha[\rho\sigma][\tau\delta]} = 0.$$

Эти соотношения для всех тензоров строения (5.2.8) выполняются автоматически (см. свойства симметрии 2 и 3).

(б) Соотношения вида

$$\epsilon_{\rho\sigma\tau} T^{\rho[\sigma\tau][\gamma\delta]} = 0. \quad (5.2.9)$$

Число таких независимых соотношений равно трем.

(с) Соотношения вида

$$\epsilon_{\rho\sigma\tau} T^{\rho[\sigma\delta_1][\tau\delta_2]} = 0.$$

Эти соотношения равносильны соотношениям (5.2.9). Итак, возвращаясь к общему случаю (5.2.3), мы видим, что достаточно рассмотреть соотношения вида (5.2.9), составленные для всех скобок в (5.2.3). Но тензор (5.2.3) симметричен относительно перестановки скобок, и потому достаточно рассмотреть соотношения, в которых α_p заменяется на ρ , γ_q — на σ и δ_q — на τ . Число таких соотношений равно числу не связанных условиями симметрии комбинаций индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}, \gamma_1, \delta_1, \dots, \gamma_{q-1}, \delta_{q-1}$, т. е. числу независимых координат тензора строения

$$T^{\{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}\}[\gamma_1 \delta_1] \dots [\gamma_{q-1} \delta_{q-1}]}$$

Обозначая размерность пространства $C_{p,q}$ через $\tilde{N}(p, q)$, мы получаем формулу для размерности пространства $C_{p,q}^0$:

$$N(p, q) = \tilde{N}(p, q) - \tilde{N}(p-1, q-1). \quad (5.2.10)$$

Дело сводится к определению чисел $\tilde{N}(p, q)$.

Переход к бисимметрическим тензорам. Чтобы найти $\tilde{N}(p, q)$, мы заменим пространство $C_{p,q}$ тензоров типа (5.2.3) *изоморфным* ему пространством. В качестве такого пространства мы возьмем пространство $\text{Sym}(p, q)$ всех бисимметрических тензоров

$$T^{\{\alpha_1 \dots \alpha_p\}}_{\{\beta_1 \dots \beta_q\}} \quad [(5.2.11)]$$

(см. § 3.6).

Изоморфизм

$$\varphi: C_{p,q} \rightarrow \text{Sym}(p, q) \quad (5.2.12)$$

строится следующим образом. Фиксируем базис e в пространстве $C(3)$; тем самым все рассматриваемые тензоры над $C(3)$ приобретают определенные координаты.

По координатам (5.2.3) тензора из $C_{p,q}$ построим числа

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} = 2^{-\frac{q}{2}} \epsilon_{\beta_1 \gamma_1 \delta_1} \epsilon_{\beta_2 \gamma_2 \delta_2} \dots \epsilon_{\beta_q \gamma_q \delta_q} T^{\{\alpha_1 \dots \alpha_p\}[\gamma_1 \delta_1] \dots [\gamma_q \delta_q]} \quad (5.2.13)$$

Как мы знаем (§ 3.2), задание произвольной системы чисел $T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ однозначно определяет тензор $T(p, q)$, имеющий эти числа своими координатами относительно базиса e .

Этот тензор мы и поставим в соответствие исходному тензору из $C_{p,q}$; итак, изоморфизм φ описывается в координатах уравнениями (5.2.13). Из свойств симметрии тензора $T^{(\alpha_1 \dots \alpha_p) [\gamma_1 \delta_1] \dots [\gamma_q \delta_q]}$ непосредственно следует, что $T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ симметричен по верхним и по нижним индексам. Легко проверить, что φ — взаимно однозначное соответствие между пространствами $C_{p,q}$ и $\text{Sym}(p, q)$; тензоры из $C_{p,q}$ могут быть восстановлены по их образам:

$$T^{(\alpha_1 \dots \alpha_p) [\gamma_1 \delta_1] \dots [\gamma_q \delta_q]} = 2^{-\frac{q}{2}} \epsilon^{\beta_1 \gamma_1 \delta_1} \dots \epsilon^{\beta_q \gamma_q \delta_q} T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}. \quad (5.2.14)$$

Нетрудно также проверить, что соответствие линейно и сохраняет скалярные произведения (ср. определение в § 2.5), т. е. обладает всеми свойствами (1.1.11).

Построенный нами изоморфизм φ зависит, конечно, от выбранного базиса; если бы мы воспользовались другим базисом e' , то получили бы другой изоморфизм φ' тех же пространств $C_{p,q}$, $\text{Sym}(p, q)$. Однако формула (5.2.5) показывает, что эти изоморфизмы отличаются друг от друга только градиентным преобразованием (ср. § 4.2 (e)):

$$\varphi'(T) = e'^{\mu} \varphi(T), \quad \mu \text{ действительно.} \quad (5.2.15)$$

Как мы увидим в дальнейшем, такое отличие для физических приложений несущественно.

Число независимых компонент тензора из $\text{Sym}(p, q)$, и тем самым размерность $\text{Sym}(p, q)$, определяется формулой

$$\frac{1}{4} (p+1)(p+2)(q+1)(q+2)$$

(см. (3.6.15)). Поскольку размерности изоморфных пространств совпадают, размерность $C_{p,q}$ равна

$$\tilde{N}(p, q) = \frac{1}{4} (p+1)(p+2)(q+1)(q+2). \quad (5.2.16)$$

В силу (5.2.10) степень неприводимого представления

$$N(p, q) = \frac{1}{2} (p + 1) (q + 1) (p + q + 2). \quad (5.2.17)$$

Переход от тензоров вида (5.2.3) к бисимметрическим тензорам имеет еще то преимущество, что число индексов при этом уменьшается: вместо $2q$ верхних индексов $\gamma_1, \delta_1, \dots, \gamma_q, \delta_q$ получаем q нижних индексов.

Следует иметь в виду, что тензорам из $C_{p,q}^0$ соответствуют бисимметрические тензоры специального вида. Именно, линейные соотношения вида (5.2.9) (как мы видели, единственно существенные из соотношений (5.2.6)) равносильны, ввиду (5.2.13), (5.2.14), соотношениям вида

$$T_{\beta_1 \dots \alpha \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha \dots \alpha_p} = 0$$

(подразумевается суммирование по α ; при $p = 0$ соотношения этого вида отсутствуют).

Но для бисимметрического тензора положение индекса суммирования среди верхних и нижних индексов безразлично; значит, соотношения, соответствующие (5.2.9), можно записать в виде

$$T_{\alpha \beta_2 \dots \beta_q}^{\alpha \alpha_2 \dots \alpha_p} = 0. \quad (5.2.18)$$

Тензоры, удовлетворяющие таким соотношениям, назовем *бесследными* (ср. определение бесследных матриц в § 2.2). (В случае $p = 0$ мы условимся считать бесследными *все* тензоры валентности $(0, q)$.) Итак, изоморфизм φ переводит пространство неприводимого представления $C_{p,q}^3$ в пространство $\text{Sym}^0(p, q)$ бесследных бисимметрических тензоров валентности (p, q) . Мы можем считать это последнее пространством представления, заменяя операторы представления $\bar{U}x = y$ операторами $\bar{U}\varphi(x) = \varphi(y)$, действующими в $\text{Sym}^0(p, q)$. Легко видеть, что при этом действие операторов \bar{U} описывается формулой (3.3.9). Таким образом, *все* (с точностью до эквивалентности) неприводимые представления группы $SU(3)$ задаются типами $\text{Sym}^0(p, q)$ бесследных бисимметрических тензоров.

Мы будем обозначать неприводимые представления $SU(3)$ символами соответствующих тензоров: представления T_{β}^{α} , $T^{\alpha\beta\gamma}$ и т. п.

В следующей таблице указаны степени $N(p, q)$ неприводимых представлений, соответствующих $p, q = 1, 2, \dots, 6$.

$q \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	3	6	10	15	21	28
1		8	15	24	35	48	63
2			27	42	60	81	105
3				64	90	120	154
4					125	165	210
5						216	273
6							343

(5.2.19)

Эта таблица симметрична относительно перестановки p, q , как видно из формулы (5.2.17).

§ 5.3. Представления $SU(n)$ при любом n

Тензорные представления. Согласно формуле (3.3.8) каждый оператор L в пространстве $C(n)$ индуцирует оператор \bar{L} в пространстве $C(p, q)$ всех тензоров $T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$.

Точно так же, как в § 5.1, показывается, что это соответствие определяет представление Π группы $GL(n, C)$ всех обратимых операторов пространства $C(n)$ в тензорном пространстве $C(p, q)$. Назовем это представление *тензорным представлением* типа $T(p, q)$.

Представление $T(p, q)$, рассматриваемое на подгруппе $SU(n)$, индуцирует представление этой группы, которое мы также назовем представлением типа $T(p, q)$. Выделяя надлежащим образом в $C(p, q)$ подпространства, инвариантные относительно группы $SU(n)$ (т. е., точнее говоря, относительно представляющей ее группы операторов), можно построить все неприводимые представления $SU(n)$. В действительности, как будет показано ниже, все такие представления можно построить уже в пространствах $C(p, 0)$. Однако в некоторых случаях удобнее строить их в $C(p, q)$ с $q \neq 0$ (ср. § 5.2).

Представление группы $GL(n, C)$, как мы знаем, определяет в пространстве $C(p, q)$ представление соответствующей алгебры Ли $AGL(n)$, состоящей из *всех* операторов в $C(n)$. Таким образом, *имеет смысл говорить о представляющих операторах не только для операторов алгебры Ли $ASU(n)$, но и для любых вообще операторов в $C(n)$* . Такое расширение представления алгебры Ли очень удобно в вычислениях. В частности, можно выбрать для $ASU(n)$ в качестве *внешних* образующих просто устроенные матрицы Окубо A_b^a , или матрицы B_b^a (см. § 4.5 (a), (b)), вместо громоздких эрмитовых образующих λ_k (ср. § 4.5 (f)). Для представлений таких внешних образующих мы получим простые формулы, и интересующие нас операторы представляющей алгебры Ли будем находить с помощью этих формул.

Методы, развитые в § 5.2, позволяют найти все неприводимые представления группы $SU(n)$ при любом n ; для этого надо обобщить понятие типа симметрии тензора с помощью схем Юнга.

Схемы Юнга. Зададим произвольную невозрастающую систему целых положительных чисел

$$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_k, \quad p_1 \leq n - 1. \quad (5.3.1)$$

Пусть

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = N.$$

Поставим в соответствие системе чисел (5.3.1) диаграмму из N квадратов, i -й столбец которой состоит из p_i квадратов; столбцы располагаются последовательно слева направо в порядке номеров, причем их первые квадраты

располагаются по одной горизонтали. Занумеруем квадраты, расположив в них числа $1, 2, \dots, N$ так, чтобы в каждом столбце числа возрастали сверху вниз подряд, а в каждой строке — справа налево:

11	8	6	4	2	1
12	9	7	5	3	
13	10				
14					

(5.3.2)

Таблица Y , полученная таким образом, называется *схемой Юнга*. Число строк в схеме Юнга меньше числа n , входящего в определение рассматриваемой группы $SU(n)$.

Неприводимые представления. Рассмотрим всевозможные подстановки s чисел $1, 2, \dots, N$, сохраняющие строки схемы Y , т. е. переводящие каждое число схемы в число той же строки, и всевозможные подстановки t , сохраняющие столбцы схемы.

Каждая подстановка s определяет оператор в пространстве тензоров $C(N, 0)$ всех N раз контравариантных тензоров, обозначаемый той же буквой (см. § 3.6). Построим операторы

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{1}{\sigma} \sum_s s, \\ \mathbf{Q} &= \frac{1}{\tau} \sum_t \text{Sgn } t \cdot t, \end{aligned} \right\} \quad (5.3.3)$$

где суммирование распространяется на все подстановки с указанными выше свойствами, σ — число подстановок s , τ — число подстановок t . Операторы \mathbf{P} , \mathbf{Q} действуют в том же тензорном пространстве $C(N, 0)$, а их произведение \mathbf{QP} , как можно показать, идемпотентно, т. е.

$$\mathbf{QP} \cdot \mathbf{QP} = \mathbf{QP}. \quad (5.3.4)$$

Можно показать также, что \mathbf{QP} — эрмитов оператор и, следовательно (см. § 1.2)—проектирующий оператор. Говорят, что тензор $T(N, 0)$ имеет *тип симметрии* Y , если он инвариантен по отношению к оператору \mathbf{QP} ,

$$\mathbf{QP}T = T. \quad (5.3.5)$$

Из (5.3.4) следует, что оператор \mathbf{QP} переводит каждый тензор $T(N, 0)$ в тензор типа симметрии Y . Тензоры типа симметрии Y образуют, как легко видеть, *подпространство* пространства $C(N, 0)$, которое мы обозначим через $\text{Sym } Y$. Оператор \mathbf{QP} есть оператор проектирования на $\text{Sym } Y$. Так же как в § 5.2, доказывается, что $\text{Sym } Y$ инвариантно по отношению к группе $SU(n)$, т. е. что операторы, представляющие эту группу в пространстве $C(N, 0)$, переводят тензоры типа симметрии Y в тензоры того же типа симметрии (ср. (5.1.11)). Таким образом, получается представление группы $SU(n)$ в пространстве $\text{Sym } Y$. Можно показать, что для любой схемы Юнга Y представление $\text{Sym } Y$ неприводимо, что для разных схем Y, Y' представления $\text{Sym } Y, \text{Sym } Y'$ не эквивалентны и что каждое неприводимое представление группы $SU(n)$ эквивалентно одному из представлений $\text{Sym } Y$. Доказательства этих теорем сложны и выходят за рамки этой книги.

Рассмотрим ближе строение тензоров типа симметрии Y .

Пусть в схеме Юнга Y содержится r_1 столбцов длины 1, r_2 столбцов длины 2, ..., r_m столбцов длины m . Занумеруем заново индексы тензора типа Y по следующему правилу:

$$T^A$$

где

$$A = \{\alpha_1 \dots \alpha_{r_1}\} [\beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}] \dots [\beta_1^{(r_1)}, \beta_2^{(r_1)}] \times \\ \times [\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \gamma_3^{(1)}] \dots [\gamma_1^{(r_2)}, \gamma_2^{(r_2)}, \gamma_3^{(r_2)}] \dots [\delta_1^{(r_m)}, \dots, \delta_{p_1}^{(r_m)}]. \quad (5.3.6)$$

Поскольку каждый тензор типа симметрии Y получается из некоторого другого тензора последовательным применением операторов \mathbf{P}, \mathbf{Q} , такой тензор T обладает следующими свойствами:

- (1) T симметричен относительно индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_1}$;
- (2) T антисимметричен относительно каждой группы индексов, стоящей в одной из квадратных скобок;

(3) T симметричен относительно перестановки квадратных скобок, содержащих одинаковое число индексов (причем порядок индексов в скобках не меняется).

Однако этими свойствами тензоры типа Y еще не характеризуются. Симметризации «по строкам», входящие в оператор \mathbf{P} , приводят еще к другим линейным соотношениям между координатами тензора T , частный случай которых, при $n = 3$, представляют соотношения (5.2.6).

Примеры применения схем Юнга к построению неприводимых представлений (для важного в физике случая $n = 6$) приведены в § 14.1; этот параграф полезно прочесть уже теперь как иллюстрацию к предыдущему изложению.

Степени представлений. Укажем, без доказательства, правило для вычисления степени неприводимых представлений групп $SU(n)$. Обозначим через q_1, q_2, \dots, q_l длины строк схемы Юнга Y , расположенные в порядке убывания. Дополним эту последовательность нулевыми значениями q_{l+1}, \dots, q_n и положим

$$d_1 = q_1 + n - 1, \quad d_2 = q_2 + n - 2, \dots, \quad d_{n-1} = q_{n-1} + 1, \\ d_n = q_n. \quad (5.3.7)$$

Далее, для любой последовательности $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ положим

$$\Delta(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{i < j} (a_i - a_j). \quad (5.3.8)$$

Тогда степень неприводимого представления, заданного схемой Юнга Y , равна

$$\dim Y = \frac{\Delta(d_1, d_2, \dots, d_n)}{\Delta(n-1, n-2, \dots, 0)}. \quad (5.3.9)$$

Рассмотрим в качестве примера представление $SU(6)$, заданное схемой Юнга



$$(5.3.10)$$

В этом случае

$$d_1 = 7, d_2 = 5, d_3 = 4, d_4 = 3, d_5 = 2, d_6 = 0,$$

$$\dim Y = \frac{(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 4) \cdot (3) \cdot (2)}{(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2)} = 35.$$

Аналогично для схемы Юнга

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} \quad (5.3.11)$$

представление $SU(6)$ имеет размерность

$$\dim Y = \frac{(4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2)}{(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2)} = 56.$$

Регулярное представление. *Регулярным представлением* называется представление группы $SU(n)$, соответствующее схеме Юнга Y_{reg} :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \cdot & \\ \hline \cdot & \\ \hline \cdot & \\ \hline n & \\ \hline \end{array} \quad (5.3.12)$$

Тензоры типа симметрии Y_{reg} имеют вид

$$T^{\alpha[\beta_1 \dots \beta_{n-1}]} \quad (5.3.13)$$

Так как симметризация \mathbf{P} приводит к тензору, симметричному по двум первым индексам, то α перестановочен с любым из индексов β_i ($i = 1, \dots, n - 1$):

$$T^{\alpha[\beta_1 \dots \beta_i \dots \beta_{n-1}]} = T^{\beta_i[\beta_1 \dots \alpha \dots \beta_{n-1}]} \quad (5.3.14)$$

Легко видеть, что соотношения (5.3.14) исчерпывают дополнительные условия, необходимые для характеристики типа симметрии Y (ср. (5.2.6)).

Определим тензор типа $T(1,1)$ по формуле

$$T_{\beta}^{\alpha} = \epsilon_{\beta\beta_1 \dots \beta_{n-1}} T^{\alpha[\beta_1 \dots \beta_{n-1}]}, \quad (5.3.15)$$

где

$$\epsilon_{\gamma_1 \dots \gamma_n} = \text{Sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}. \quad (5.3.16)$$

Тогда, в силу (5.3.14),

$$\begin{aligned} T_{\alpha}^{\alpha} &= \epsilon_{\alpha\beta_1 \dots \beta_{n-1}} T^{\alpha[\beta_1 \dots \beta_{n-1}]} = \epsilon_{\beta_1 \alpha \dots \beta_{n-1}} T^{\beta_1[\alpha \dots \beta_{n-1}]} = \\ &= -\epsilon_{\alpha\beta_1 \dots \beta_{n-1}} T^{\alpha[\beta_1 \dots \beta_{n-1}]}, \end{aligned}$$

откуда вытекает бесследность тензоров T_{β}^{α} :

$$T_{\alpha}^{\alpha} = 0. \quad (5.3.17)$$

Точно так же как в § 5.2, можно теперь заменить пространство представления $\text{Sym} Y_{\text{reg}}$ изоморфным ему пространством бесследных тензоров T_{α}^{α} , которое мы обозначим через $C_0(1,1)$. Обычно регулярное представление задают именно с помощью бесследных тензоров T_{β}^{α} ; это представление неприводимо, так как эквивалентно представлению, полученному из схемы Юнга. Степень регулярного представления находится без труда. В самом деле, тензор T_{β}^{α} имеет n^2 координат, связанных единственным соотношением (5.3.17); значит,

$$\dim Y_{\text{reg}} = n^2 - 1. \quad (5.3.18)$$

При $n = 6$ этот результат был получен выше из общей формулы (5.3.9).

Вычисление операторов Окубо в любом представлении. Рассмотрим тензорное пространство $C(p, q)$ над пространством $C(n)$. В этом пространстве определено представление Π группы $SU(n)$ по формуле (3.3.9); это представление, вообще говоря, *приводимо*. Обозначим через $\tilde{\Pi}$ соответствующее представление алгебры Ли $ASU(n)$ (и его продолжение на алгебру всех матриц $AGL(n)$, см. начало этого параграфа). Вычислим операторы $\tilde{A}_{\beta}^{\alpha} = \tilde{\Pi}(A_{\beta}^{\alpha})$, представляющие операторы Окубо в пространстве $C(p, q)$. Для этого достаточно описать действие

\tilde{A}_β^α на любой базисный тензор

$$\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} \quad (5.3.19)$$

(см. определение (3.2.1)).

В простейшем случае $p = 1$, $q = 0$ (фундаментальное представление), очевидно, $\tilde{A}_\beta^\alpha = A_\beta^\alpha$. Рассмотрим еще случай $p = 0$, $q = 1$. В этом случае, согласно (3.3.8), для любого оператора L из $GL(n)$ представляющий оператор действует по формуле

$$T'_\alpha = (L^{-1})^\gamma_\alpha T_\gamma. \quad (5.3.20)$$

Здесь суммирование, в отличие от общего правила (1.2.3), производится по *верхнему* индексу матрицы L^{-1} ; поэтому, полагая

$$L = e^{itC},$$

имеем

$$\Pi(e^{itC}) = e^{-itC^\tau},$$

где C^τ — транспонированная матрица C , т. е. $(\alpha|C^\tau|\beta) = (\beta|C|\alpha)$. Согласно (4.7.2).

$$e^{-itC^\tau} = e^{it\tilde{C}},$$

откуда

$$\tilde{C} = -C^\tau.$$

В частности,

$$\tilde{A}_\beta^\alpha = -(A_\beta^\alpha)^\tau. \quad (5.3.21)$$

Это значит, что A_β^α представляется в пространстве $C(0, 1)$ оператором $-(A_\beta^\alpha)^\tau$. Матричные элементы операторов \tilde{A}_β^α , A_β^α связаны соотношением

$$(i|\tilde{A}_\beta^\alpha|k) = -(k|A_\beta^\alpha|i). \quad (5.3.22)$$

Вернемся к общему случаю. Применяя к тензору (5.3.19) формулу (4.7.9) и опуская, для краткости,

индексы α, β , имеем:

$$\begin{aligned} A\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{(\beta_1 \dots \beta_q)} = & [Ae_{\alpha_1} \otimes e_{\alpha_2} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_p} \otimes \tilde{e}^{\beta_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{\beta_q} + \\ & + e_{\alpha_1} \otimes Ae_{\alpha_2} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_p} \otimes \tilde{e}^{\beta_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{\beta_q} + \\ & + \dots \dots \dots + \\ & + e_{\alpha_1} \otimes e_{\alpha_2} \otimes \dots \otimes Ae_{\alpha_p} \otimes \tilde{e}^{\beta_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{\beta_q}] - \\ & - [e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_p} \otimes A^\tau \tilde{e}^{\beta_1} \otimes \tilde{e}^{\beta_2} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{\beta_q} + \\ & + e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_p} \otimes \tilde{e}^{\beta_1} \otimes A^\tau \tilde{e}^{\beta_2} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{\beta_q} + \\ & + \dots \dots \dots + \\ & + e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_p} \otimes \tilde{e}^{\beta_1} \otimes \tilde{e}^{\beta_2} \otimes \dots \otimes A^\tau \tilde{e}^{\beta_q}]. \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

Рассмотрим теперь отдельно два случая.

1. $\alpha \neq \beta$. Тогда, согласно (4.5.3),

$$A_\beta^\alpha = B_\beta^\alpha,$$

$$A_\beta^\alpha e_{\alpha_i} = B_\beta^\alpha e_{\alpha_i} = \delta_{\alpha_i}^\alpha e_\beta,$$

$$(A_\beta^\alpha)^\tau \tilde{e}^{\beta_k} = \delta_{\beta_k}^\alpha \tilde{e}^\alpha.$$

Теперь формулу (5.3.23) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} A_\beta^\alpha \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} = & \sum_i \delta_{\alpha_i}^\alpha \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} - \\ & - \sum_k \delta_{\beta_k}^\alpha \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_{k-1}, \alpha, \beta_{k+1}, \dots, \beta_q} \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

2. $\alpha = \beta$. Тогда, согласно (4.5.3),

$$\left. \begin{aligned} A_\alpha^\alpha &= B_\alpha^\alpha - \frac{1}{n} \epsilon(n), \\ A_\alpha^\alpha e_{\alpha_i} &= \left(\delta_{\alpha_i}^\alpha - \frac{1}{n} \right) e_{\alpha_i}, \\ (A_\alpha^\alpha)^\tau \tilde{e}^{\beta_k} &= \left(\delta_{\alpha_k}^\alpha - \frac{1}{n} \right) \tilde{e}^{\beta_k} \end{aligned} \right\} \quad (5.3.25)$$

(н. с. по α).

Отсюда

$$\begin{aligned} A_\alpha^\alpha \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} &= \left[\sum_i \left(\delta_{\alpha_i}^\alpha - \frac{1}{n} \right) - \sum_k \left(\delta_{\alpha_k}^\alpha - \frac{1}{n} \right) \right] \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} = \\ &= \left(\sum_i \delta_{\alpha_i}^\alpha - \sum_k \delta_{\alpha_k}^\alpha - \frac{p-q}{n} \right) \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}, \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

Таким образом, все базисные тензоры являются собственными векторами диагональных операторов Окубо. Для фундаментального представления $T(1, 0)$ имеем, в частности,

$$\left. \begin{aligned} A_{\beta}^{\alpha} \Psi_{\gamma} &= \delta_{\gamma}^{\alpha} \Psi_{\beta} \quad (\alpha \neq \beta), \\ A_{\alpha}^{\alpha} \Psi_{\gamma} &= \left(\delta_{\gamma}^{\alpha} - \frac{1}{n} \right) \Psi_{\gamma} \quad (\text{н. с.}). \end{aligned} \right\} \quad (5.3.27)$$

Для регулярного представления

$$A_{\beta}^{\alpha} \Psi_{\delta}^{\gamma} = \delta_{\delta}^{\alpha} \Psi_{\beta}^{\gamma} - \delta_{\beta}^{\gamma} \Psi_{\delta}^{\alpha}. \quad (5.3.28)$$

§ 5.4. Тензороператоры и операторные представления

Тензороператоры. Обобщим некоторые свойства операторов Окубо и введем понятие тензороператора, которое встречается в ряде вопросов физики. Благодаря этому понятию способ обозначения операторов Окубо с помощью верхнего и нижнего индексов, который до сих пор служил лишь для удобной нумерации этих операторов и записи их перестановочных соотношений, приобретает более содержательный смысл.

Пусть каждому базису e в пространстве $C(n)$ поставлена в соответствие система из n^2 операторов L_{β}^{α} , действующих в $C(n)$:

$$e \rightarrow L_{\beta}^{\alpha}, \quad (5.4.1)$$

причем справедливы следующие соотношения: если

$$e' \rightarrow L'_{\beta}^{\alpha}, \quad (5.4.2)$$

то

$$L'_{\beta}^{\alpha} = U_{\sigma}^{\alpha} (U^{-1})_{\beta}^{\sigma} L_{\tau}^{\sigma}. \quad (5.4.3)$$

Тогда мы будем говорить, что задан тензороператор типа $T(1,1)$ над пространством $C(n)$. Аналогично определяются тензороператоры любой валентности (p, q) .

Легко видеть, что если отнести базису e числа

$$L_{\beta i}^{\alpha j} = (j | L_{\beta}^{\alpha} | i), \quad (5.4.4)$$

то получается обычный тензор типа $T(2,2)$, и обратно, из обычного тензора можно получить тензороператор по формуле (5.4.4). Если \mathcal{H}_α^β — обычный тензор над $C(n)$ (с числовыми координатами), то действующий в $C(n)$ оператор

$$L_{\beta\alpha}^\alpha \mathcal{H}_\alpha^\beta \quad (5.4.5)$$

не зависит от выбора базиса.

Инвариантные тензороператоры в $C(n)$. Физическое равноправие всех систем координат в $C(n)$ равносильно требованию, чтобы числа $L_{\beta i}^{\alpha j}$ не зависели от выбора базиса; иначе это требование выражают, называя $L_{\beta i}^{\alpha j}$ «инвариантным тензором», а L_β^α — *инвариантным тензороператором*. Можно показать, что все тензоры такого рода суть линейные комбинации тензоров

$$\delta_i^\alpha \delta_\beta^j, \quad \delta_\beta^\alpha \delta_i^j, \quad (5.4.6)$$

которым соответствуют тензороператоры

$$B_\beta^\alpha, \quad \delta_\beta^\alpha \epsilon(n). \quad (5.4.7)$$

Если интересоваться *бесследными* тензороператорами, то мы (с точностью до множителя) однозначно приходим к тензороператору Окубо

$$A_\beta^\alpha = B_\beta^\alpha - \frac{1}{n} \delta_\beta^\alpha \epsilon(n). \quad (5.4.8)$$

Этим подчеркивается особая роль операторов Окубо в вопросах, в которых изучаемая наблюдаемая инвариантна относительно группы $SU(n)$.

Существует еще другой способ охарактеризовать инвариантные тензороператоры. Заметим, что условие независимости матриц $(j|L_\beta^\alpha|i)$ от выбора базиса может быть записано в операторной форме:

$$L_\beta'^\alpha = U^{-1} L_\beta^\alpha U \quad (5.4.9)$$

для любого унитарного оператора U . Сравнивая это с определением тензороператора (5.4.3), находим, что

$$U^{-1} L_\beta^\alpha U = U_\sigma^\alpha (U^{-1})_\beta^\sigma L_\tau^\alpha. \quad (5.4.10)$$

Полагая здесь $U = e^{i\epsilon C}$, где C — эрмитов оператор, имеем:

$$[L_\beta^\alpha, C] = C_\lambda^\alpha L_\beta^\lambda - C_\beta^\mu L_\mu^\alpha. \quad (5.4.11)$$

В силу линейного характера, соотношения (5.4.11) верны и для *любого* оператора C в $C(n)$. В частности, для $C = A_\tau^\sigma$ имеем:

$$[L_\beta^\alpha, A_\tau^\sigma] = \delta_\tau^\alpha L_\beta^\sigma - \delta_\beta^\sigma L_\tau^\alpha. \quad (5.4.12)$$

Обратно, из (5.4.12) или (5.4.11) без труда вытекает (5.4.9). Таким образом, (5.4.12) представляет собой необходимое и достаточное условие инвариантности тензор-оператора L_β^α .

Обобщение понятия тензороператора. Предположим, что каждому базису e пространства $C(n)$ поставлена в соответствии система из n^2 операторов L_β^α , действующих в пространстве $C(N)$ (N , вообще говоря, не равно n); если при этом для любой замены базиса в $C(n)$ соблюдается закон преобразования (5.4.3), то мы будем говорить, что задан *тензороператор в пространстве $C(N)$ над пространством $C(n)$* . Если, например, задано представление Π группы $SU(n)$ степени N и $\tilde{\Pi}$ — соответствующее представление алгебры Ли группы $SU(n)$, то для любого оператора L в $C(n)$ определен образ $\tilde{\Pi}(L)$. Взяв любой тензороператор L_β^α в $C(n)$ над $C(n)$, легко показать, что соответствие

$$e \rightarrow \tilde{\Pi}(L_\beta^\alpha) \quad (5.4.13)$$

определяет тензороператор $\tilde{L}_\beta^\alpha = \tilde{\Pi}(L_\beta^\alpha)$ в $C(N)$ над $C(n)$.

Операторные представления. Пусть G — группа Ли, состоящая из n -рядных матриц. Рассмотрим пространство $\hat{C}(1, 1)$ всех тензороператоров валентности (1,1) над $C(n)$, определенных в $C(N)$. Каждый такой тензороператор есть матрица L_β^α , состоящая из операторов, действующих в $C(N)$.

Матрице U из группы G соответствует оператор в пространстве $\hat{C}(1, 1)$, определенный формулой (5.4.3). Легко проверить, что это соответствие обладает свойствами, указанными в начале § 4.3, с той единственной разницей,

что теперь пространство представления состоит из тензоров не со скалярными, а с операторными компонентами. Аналогично определяются *операторные представления* любой валентности. Определение представления алгебры Ли (§ 4.6) также без затруднений переносится на операторный случай.

Пусть $C(N)$ — пространство некоторого представления группы $SU(n)$. Тогда с помощью формулы (5.4.13) можно построить тензороператоры вида $\tilde{\Pi}(L_\beta^\alpha)$. Таким образом, получается, например, тензороператор $A_\beta^\alpha(N) = = \tilde{\Pi}(A_\beta^\alpha)$, представляющий тензороператор Окубо. Этим способом можно получить, однако, лишь весьма частные тензороператоры из $\hat{C}(1,1)$. Так, например, свертка представляющих операторов $A_\beta^\alpha(N)A_\beta^\sigma(N)$ принадлежит пространству операторного представления $\hat{C}(1,1)$, но не обязательно состоит из представляющих операторов, так как для представления алгебры Ли, вообще говоря, $\tilde{\Pi}(A B) \neq \tilde{\Pi}(A) \tilde{\Pi}(B)$.

Инвариантные тензороператоры в общем случае. В интересующих нас случаях пространство $C(N)$, где действуют операторы L_β^α , само является пространством (обычных) тензоров над $C(n)$, т. е. одним из пространств $C(p, q)$. Тогда задание базиса e в $C(n)$ определяет не только компоненты тензороператора L_β^α (см. (5.4.1)), но и базис в $C(p, q)$. В этом базисе каждый оператор L_β^α имеет матричные элементы $(i|L_\beta^\alpha|k)$, $i, k = 1, \dots, N$. При переходе к новому базису e' в пространстве $C(n)$ мы получаем новые компоненты тензороператора L_β^α (см. (5.4.3)), новый базис в $C(p, q)$ и новые матричные элементы $(i|L_\beta^\alpha|k)'$. Важный для приложений класс тензороператоров составляют такие L_β^α , для которых *матричные элементы не зависят от выбора базиса e* :

$$(i|L_\beta^\alpha|k)' = (i|L_\beta^\alpha|k), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n, \quad i, k = 1, \dots, N. \quad (5.4.14)$$

Только такие тензороператоры могут характеризовать свойства физической системы способом, не зависящим от выбора «системы отсчета».

При замене базиса условие инвариантности (5.4.9) остается в силе, если под U понимать представляющий оператор в $C(p, q)$. Далее, обобщается (5.4.10), где в левой части все три множителя должны пониматься как операторы в $C(p, q)$, в правой части L_τ^σ — как операторы в $C(p, q)$, а U_σ^α , $(U^{-1})_\beta^\tau$ — матричные элементы операторов U , U^{-1} в n -рядном (фундаментальном) представлении. Из (5.4.10), как и выше, вытекает уравнение (5.4.12) для любого инвариантного тензороператора, в котором операторы Окубо A_β^α надо заменить их представляющими операторами в N -рядном представлении $\tilde{A}_\beta^\alpha = A_\beta^\alpha(N)$. Мы назовем (5.4.12) уравнением Окубо.

Таким образом, инвариантные тензороператоры можно искать как решения уравнения Окубо. Окубо предложил способ построения решений этого уравнения из операторов Окубо соответствующего представления $SU(n)$. Мы изложим сейчас этот способ, имеющий важное значение при выводе так называемых массовых формул в теории унитарной симметрии; при этом оставляется в стороне вопрос, получают ли методом Окубо все решения уравнения (5.4.12).

Прежде всего, с помощью тождества Якоби (4.4.8) легко доказывается, что если тензороператоры L_β^α , M_β^γ удовлетворяют уравнению Окубо, то их свертка

$$N_\beta^\alpha = L_\gamma^\alpha M_\beta^\gamma \quad (5.4.15)$$

удовлетворяет тому же уравнению.

Тензороператор Окубо $A_\beta^\alpha(N)$ в любом представлении удовлетворяет уравнению Окубо, поскольку (5.4.12) сохраняет свой вид при представлениях алгебры Ли; применяя формулу (5.4.15), находим последовательность решений уравнения Окубо (N опускается):

$$A_\beta^\alpha, A_\sigma^\alpha A_\beta^\sigma, A_\sigma^\alpha A_\tau^\sigma A_\beta^\tau, \dots \quad (5.4.16)$$

Заметим еще, что единичный тензороператор $\delta_\beta^\alpha \in(N)$ также удовлетворяет уравнению Окубо. В силу линейности уравнения, можно теперь построить «общее решение» уравнения Окубо с произвольными числовыми

коэффициентами:

$$L_{\beta}^{\alpha} = a_0 \delta_{\beta}^{\alpha} \epsilon + a_1 A_{\beta}^{\alpha} + a_2 A_{\sigma}^{\alpha} A_{\beta}^{\sigma} + a_3 A_{\sigma}^{\alpha} A_{\tau}^{\sigma} A_{\beta}^{\tau} + \dots \quad (5.4.17)$$

Так как число линейно независимых операторов в N -мерном пространстве (равное N^2 , как легко усмотреть, взяв в качестве базиса операторы B_{β}^{α} , § 4.5 (а)) конечно, в формуле (5.4.17) может участвовать лишь конечное число линейно независимых слагаемых. Поэтому мы назовем правую часть (5.4.17) *полиномом Окубо*. В частных случаях ($G = SU(3)$, $SU(6)$) такие полиномы будут изучены в главе 17.

Для инвариантных тензороператоров высших валентностей (p, q) можно вывести уравнения, аналогичные уравнению Окубо; приведем такое уравнение в случае $p = 3$, $q = 2$, откуда будет ясно и строение уравнения в общем случае:

$$[L_{\delta\epsilon}^{\alpha\beta\gamma}, A_{\tau}^{\sigma}] = \delta_{\tau}^{\alpha} L_{\delta\epsilon}^{\sigma\beta\gamma} + \delta_{\tau}^{\beta} L_{\delta\epsilon}^{\alpha\sigma\gamma} + \delta_{\tau}^{\gamma} L_{\delta\epsilon}^{\alpha\beta\sigma} - \delta_{\delta}^{\sigma} L_{\tau\epsilon}^{\alpha\beta\gamma} - \delta_{\epsilon}^{\sigma} L_{\delta\tau}^{\alpha\beta\gamma}. \quad (5.4.18)$$

Можно заметить сходство этой формулы с правилом ковариантного дифференцирования, что, впрочем, не имеет существенного значения для дальнейшего изложения. Очевидно также сходство (5.4.18) с формулой (5.3.24).

Приведем примеры решений уравнения Окубо в случае $p = 3$, $q = 0$:

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \epsilon(N), \quad \epsilon^{\alpha\beta\lambda} A_{\lambda}^{\gamma}, \quad \epsilon^{\alpha\lambda\mu} A_{\lambda}^{\beta} A_{\mu}^{\gamma}, \quad \epsilon^{\lambda\mu\nu} A_{\lambda}^{\alpha} A_{\mu}^{\beta} A_{\nu}^{\gamma}, \dots \quad (5.4.19)$$

Псевдотензорный характер $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ (см. (5.2.5)) не играет при этом роли, поскольку нас интересуют только операторы из группы $SU(n)$, которые в любом представлении имеют определитель 1.

УНИТАРНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ АДРОНОВ

ГЛАВА 6

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И ТЕОРИЯ ГРУПП

В этой главе мы изложим, не останавливаясь на обосновании, рабочую схему квантовой механики, особо выделяя роль, которую играют в ее построении представления групп.

Методы получения решений будут описаны в аксиоматическом духе. При таком изложении предварительное изучение квантовой механики не является абсолютно необходимым для понимания дальнейшего, хотя, конечно, весьма желательно познакомиться с ней по подробным руководствам.

Мы ограничиваемся квантовой теорией *одной* частицы, за исключением главы 10. Если не считать некоторых эвристических соображений в главе 17, излагаемая ниже теория является *нерелятивистской*; кроме того, в *этой* главе рассматриваются частицы без спина, спин же вводится дальше, в главе 7.

Наконец, мы все время будем считать, что рассматриваемые нами наблюдаемые физические величины не имеют непрерывного спектра, и не предполагаем знания соответствующих ему понятий.

Реальные системы всегда могут быть видоизменены так, чтобы полученная при этом система физически сколь угодно мало отличалась от исходной и чтобы интересующая нас наблюдаемая не имела непрерывного спектра.

§ 6.1. Физические системы

Мы будем рассматривать здесь лишь простейшие системы, состоящие из одной частицы. Такая система описывается в квантовой механике функцией $\psi(x, y, z, t)$, зависящей от трех пространственных (декартовых) координат и времени t ; все переменные могут меняться от $-\infty$ до ∞ и действительны, значения же ψ комплексны. ψ называется волновой функцией рассматриваемой частицы.

Понятие волновой функции введено Шредингером (1926 г.).

При фиксированном значении $t = t_0$ получаем функцию $\psi_{t_0}(x, y, z) = \psi(x, y, z, t_0)$ трех координат x, y, z ; считается, что эта функция полностью задает состояние системы в момент t_0 . Это значит, что вся информация, которую можно в момент t_0 получить о системе, должна полностью задаваться функцией $\psi_{t_0}^*(x, y, z)$. Если в некотором рассуждении момент времени фиксирован, мы будем писать вместо $\psi_{t_0}(x, y, z)$ просто $\psi(x, y, z)$ и называть $\psi(x, y, z)$ также волновой функцией частицы.

Ясно, что влияние присутствия нашей частицы на другие физические системы, например, на приборы, будет становиться все менее значительным по мере удаления от частицы; поэтому естественно потребовать, чтобы $\psi(x, y, z)$ в некотором смысле стремилась к нулю, когда точка (x, y, z) удаляется в бесконечность. Тогда в «далеких» точках ψ будет «мало отличаться от нуля», а поскольку все, что мы можем узнать о нашей частице, заключено в функции ψ , то наблюдение в таких точках обнаружит лишь «слабые следы» влияния частицы.

Перевод этих интуитивных соображений на математический язык представляет нетривиальную проблему, решенную фон Нейманом.

Согласно фон Нейману, «условие на бесконечности», налагаемое на $\psi(x, y, z)$, состоит в сходимости некоторого несобственного интеграла:

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz < \infty. \quad (6.1.1)$$

Например, для $\psi(x, y, z) = \frac{1}{1+r^\alpha}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, интеграл (6.1.1) сходится при $\alpha > 3$ и расходится при $\alpha \leq 3$; поэтому при $\alpha \leq 3$ ψ не может быть волновой функцией.

Мы видим, что сходимость интеграла (6.1.1) в некотором смысле регулирует скорость убывания ψ на бесконечности.

Далее, принимается, что умножение ψ на любое комплексное число λ не меняет состояния системы, т. е. $\psi(x, y, z)$ и $\lambda\psi(x, y, z)$ изображают одно и то же ее состояние. Иначе говоря, аппарат квантовой механики устроен таким образом, что для него существенны лишь *отношения* значений ψ в разных точках, а не сами эти значения (ср. с аналогичным свойством потенциала, где существенны лишь разности значений!). Полагая

$$\lambda = \left[\iiint_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx dy dz \right]^{-1/2} \quad (6.1.2)$$

(«нормирующий множитель»), мы можем заменить ψ функцией $\lambda\psi = \psi_0$, удовлетворяющей условию

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} |\psi_0|^2 dx dy dz = 1 \quad (6.1.3)$$

(нормированная функция) и изображающей ту же систему

Однако нормировка все же не позволяет однозначно сопоставить системе ее волновую функцию, так как можно еще, не нарушая нормировки, умножить ψ на $e^{i\alpha}$ (α действительно); такая операция называется *градиентным преобразованием*.

Физический смысл волновой функции $\psi(x, y, z, t)$ выясняется следующим *вероятностным истолкованием*, принадлежащим Борну (1926 г.): пусть ψ — нормированная волновая функция частицы в момент t_0 ; тогда вероятность того, что частица будет обнаружена в объеме V опытом, поставленным в этот момент, равна

$$\iiint_V |\psi|^2 dx dy dz. \quad (6.1.4)$$

(Если V — все пространство, интеграл (6.1.4) должен быть, следовательно, равен единице, что подтверждает целесообразность условия сходимости (6.1.1)). Кроме вероятностей (6.1.4), никакой другой информации о положении частицы квантовая механика не дает; а эти вероятности полностью определяются функцией $\psi(x, y, z, t)$ в соответствии со сказанным выше.

§ 6.2. Гильбертово пространство

Волновые функции можно складывать и умножать на комплексные числа, причем, в силу соотношений $|\psi_1 + \psi_2| \leq |\psi_1| + |\psi_2|$, $|\lambda\psi| = |\lambda| \cdot |\psi|$, условие (6.1.1) не нарушается, так что получаются снова волновые функции. Далее, для пары волновых функций ψ_1, ψ_2 можно определить скалярное произведение по формуле

$$(\psi_1 | \psi_2) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_1(x, y, z)} \psi_2(x, y, z) dx dy dz. \quad (6.2.1)$$

При этом, как можно показать, выполняются аксиомы I—III § 1.1.

Поэтому можно трактовать волновые функции как векторы некоторого комплексного евклидова пространства. Напомним еще раз, что для возможности такой трактовки существенно лишь наличие операций сложения, умножения на числа и скалярного умножения, обладающих некоторыми формальными свойствами. «Природа» векторов совершенно несущественна; они могут быть, например, тензорами, как в главе 3, или функциями, как в этом параграфе. «Длина» вектора ψ , во избежание смещения с модулем ψ , обозначается через $\|\psi\|$:

$$\|\psi\| = \left[\iiint_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz \right]^{1/2}. \quad (6.2.2)$$

$\|\psi\|$ называется еще *нормой* ψ .

Однако аксиома IV не выполняется: не существует конечной системы волновых функций $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, через которые можно было бы линейно выразить все волновые функции. Аксиома IV заменяется здесь утверждением о

существовании *бесконечного базиса* (ср. IV' главы 1): существует бесконечная последовательность волновых функций $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ такая, что всякая волновая функция $\psi(x, y, z)$ представима в виде ряда

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \dots + c_n\psi_n + \dots \quad (6.2.3)$$

Уточним смысл, в котором понимается сходимость ряда (6.2.3). Именно, если $s_n = \sum_{j=1}^n c_j\psi_j$, то (6.2.3), по определению, означает, что

$$\|\psi - s_n\|^2 = \iiint_{-\infty}^{\infty} |\psi - s_n|^2 dx dy dz \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (6.2.4)$$

Такая сходимость называется *сходимостью в среднем*. Мы будем пользоваться дальше, без оговорок, только ортонормированными базисами; это означает, что

$$(\psi_i | \psi_j) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_i(x, y, z)} \psi_j(x, y, z) dx dy dz = \delta_{ij}. \quad (6.2.5)$$

В качестве базиса можно, например, выбрать произведения функций Эрмита

$$H_m(x)H_n(y)H_p(z), \quad m, n, p = 0, 1, 2, \dots,$$

занумерованные в произвольном порядке; для нас, впрочем, важно лишь *существование* базиса. В ряде важных случаев ряд (6.2.3) сходится даже равномерно во всем пространстве.

Коэффициенты разложения (6.2.3) могут быть найдены как проекции вектора ψ на оси ψ_n (или как коэффициенты Фурье): в силу условия ортонормированности (6.2.5)

$$c_n = (\psi_n | \psi) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_n(x, y, z)} \psi(x, y, z) dx dy dz. \quad (6.2.6)$$

В случае конечномерного пространства квадрат длины вектора равен сумме квадратов его проекций на оси;

аналогичную «теорему Пифагора» можно доказать для волновых функций:

$$\|\psi\|^2 = \iiint_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2. \quad (6.2.7)$$

Это соотношение называется еще равенством Парсеваля.

В силу (6.2.7), для любой волновой функции имеем сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty. \quad (6.2.8)$$

Наоборот, пусть задана такая последовательность комплексных чисел $\{c_n\}$, для которой ряд (6.2.8) сходится; тогда, как можно показать, и ряд в правой части (6.2.3) сходится в среднем к некоторой волновой функции ψ . Мы видим, что сходимость ряда (6.2.8) равносильна, в некотором смысле, сходимости интеграла (6.1.1).

Пространство волновых функций рассматривалось Гильбертом в его математических работах задолго до создания квантовой механики: оно называется *гильбертовым пространством* (ср. § 1.1). Мы будем обозначать гильбертово пространство волновых функций через $C(\infty)$.

Существует другой подход к квантовой механике, принадлежащий Гейзенбергу и исторически более ранний. При этом подходе состояние системы описывается последовательностью чисел c_1, c_2, \dots , рассматриваемых как координаты вектора в бесконечномерном пространстве: предполагается, что для всех состояний выполнено условие (6.2.8).

Поскольку операторы, играющие важную роль в квантовой механике, в координатах изображаются матрицами, построенная Гейзенбергом механика получила название *матричной*; механика же Шредингера была названа *волновой*. В силу формулы (6.2.3) оба подхода эквивалентны.

Следует, однако, заметить, что сумма ряда (6.2.3) иногда может оказаться «плохой» (разрывной, не имеющей производных) функцией.

Несмотря на отмеченную эквивалентность, не всякая процедура матричной механики может быть непосредственно перенесена с помощью формулы (6.2.3) в волновую механику. Этим объясняется необходимость перехода к «пространству пар» при трактовке спина (глава 7) и т. п.

§ 6.3. Наблюдаемые

С каждой физической системой можно сопоставить *наблюдаемые* (в старой терминологии — *физические величины*). Значения наблюдаемых суть результаты измерений и поэтому предполагаются *действительными*.

Наиболее важной наблюдаемой является *энергия*. В отличие от классической механики, в квантовой механике значения наблюдаемой, измеряемые на опыте, как правило, не произвольны, а образуют некоторое множество действительных чисел, называемое *спектром* этой наблюдаемой для данной системы.

Шредингер предложил (в 1926 г.) искать возможные значения энергии как собственные значения некоторого эрмитова оператора H , определенного на гильбертовом пространстве волновых функций $C(\infty)$.

Оператор предполагается эрмитовым именно по той причине, что все собственные значения эрмитова оператора действительны (ср. § 2.2; конечномерность пространства здесь нисусущественна).

Легко также доказать, что если $E' \neq E''$ — собственные значения H , а ψ' , ψ'' — принадлежащие им собственные векторы $C(\infty)$ (они называются также *собственными функциями*), то $(\psi' | \psi'') = 0$.

Все собственные векторы, принадлежащие данному собственному значению E , образуют вместе с нулевым вектором *собственное подпространство* C_E гильбертова пространства $C(\infty)$; здесь существенно, что сумма собственных векторов, принадлежащих C_E , и кратное такого вектора суть опять собственные векторы, принадлежащие C_E (или нулевой вектор).

Для всех операторов H , рассматриваемых в квантовой механике, все собственные подпространства C_E конечномерны. Размерность C_E называется *кратностью* собственного значения E ; если эта размерность r больше

единицы, собственное значение E называется r -кратно вырожденным.

Шредингер предложил следующее выражение оператора энергии для системы, состоящей из одной частицы:

$$H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + V\psi, \quad (6.3.1)$$

где $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$, $V(x, y, z)$ — потенциальная функция силового поля, в котором находится частица, m — масса частицы, \hbar — постоянная Планка.

Эрмитовость H , т. е. соотношение $(H\psi | \chi) = (\psi | H\chi)$, доказывается применением известной формулы Грина для оператора Лапласа к сфере большого радиуса R и предельным переходом при $R \rightarrow \infty$.

Введем еще три эрмитовых оператора, соответствующих проекциям импульса частицы:

$$p_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} \quad (6.3.2)$$

(их эрмитовость доказывается интегрированием по частям).

Тогда оператор H может быть записан в виде

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V. \quad (6.3.3)$$

В некоторых важных случаях силовое поле V обладает сферической симметрией, т. е. зависит лишь от $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; так обстоит дело, например, когда это поле создается атомным ядром.

В дальнейшем рассматриваются без оговорок только такие потенциальные функции V .

Если в качестве базисных функций ψ_n в разложении (6.2.3) взять нормированные собственные функции оператора H , то квадрат модуля коэффициента $|c_n|^2$ истолковывается как вероятность получить n -е собственное значение H при измерении энергии системы, находящейся в состоянии $\psi = \sum c_n \psi_n$.

Если $\psi = \psi_n$, энергия системы имеет точное значение E_n . Применение аналогичных соображений к другим наблюдаемым приводит к выводу, что две наблюдаемые A, B могут быть одновременно точно измерены, если у них

общие собственные функции. Но тогда операторы A, B коммутируют: $AB\psi_n = BA\psi_n$, откуда $AB\psi = BA\psi$. Обратно, для коммутирующих операторов можно построить общую систему собственных функций (ср. § 2.2).

§ 6.4. Роль представлений групп в квантовой механике

Представления группы вращений. Рассмотрим группу $SO(3)$ вращений трехмерного действительного евклидова пространства $R(3)$ (см. § 4.2 (h)). Операторы вращения, входящие в группу $SO(3)$, будем обозначать буквами g, g_1, g', \dots

Обозначим, далее, через x точку (x, y, z) пространства R^3 . Тогда для каждой волновой функции $\psi(x)$ и каждого вращения g определена функция $\psi_1(x) = \psi(g^{-1}x)$; подробнее, это значит, что

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y, z) = \\ = \psi(h_1^1x + h_2^1y + h_3^1z, h_1^2x + h_2^2y + h_3^2z, h_1^3x + h_2^3y + h_3^3z), \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

где h_i^j — матрица оператора g^{-1} в том же базисе, к которому относятся координаты x, y, z . Построим оператор U_g в гильбертовом пространстве, переводящий каждую волновую функцию ψ в ψ_1 :

$$U_g\psi(x) = \psi(g^{-1}x). \quad (6.4.2)$$

Так как

$$U_{g_1g_2}\psi(x) = \psi(g_2^{-1}g_1^{-1}x) = U_{g_1}\psi(g_2^{-1}x) = U_{g_1}U_{g_2}\psi(x), \quad (6.4.3)$$

то соответствие $g \rightarrow U_g$ определяет представление группы $SO(3)$ операторами, действующими в гильбертовом пространстве $C(\infty)$ (§ 4.3). Заметим, что это представление *бесконечномерно*, в отличие от рассматривавшихся в главе 5; но мы скоро увидим, что наиболее интересны некоторые *конечномерные* представления $SO(3)$, связанные с представлением U_g .

Далее, это представление *унитарно*, т. е. все операторы U_g , как мы сейчас докажем, унитарны в $C(\infty)$. В самом деле, якобиан ортогонального преобразования

координат g^{-1} равен 1, откуда, в силу (6.4.1),

$$\begin{aligned} \|U_g \psi\|^2 &= \iiint_{-\infty}^{\infty} |\psi_1(x', y', z')|^2 dx' dy' dz' = \\ &= \iiint_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \left| \frac{\partial(x', y', z')}{\partial(x, y, z)} \right| dx dy dz = \\ &= \iiint_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx dy dz = \|\psi\|^2. \end{aligned}$$

Чрезвычайно важным для квантовой механики фактом является *перестановочность оператора энергии H с операторами U_g , представляющими группу вращений $SO(3)$* ; напомним, что потенциальная функция V предполагается сферически симметричной, так что указанная перестановочность отражает некоторое *свойство симметрии* рассматриваемой физической системы (состоящей из частицы и сферически симметричного поля).

Итак, нам надо доказать соотношение

$$HU_g = U_g H. \quad (6.4.4)$$

Согласно (6.3.1) достаточно проверить, что $\Delta U_g = U_g \Delta$ и $V U_g = U_g V$. Для доказательства первого из этих соотношений построим оператор Δ_ϵ по формуле

$$\Delta_\epsilon \psi(x) = \frac{3}{4\pi\epsilon^2} \iiint_{K_{x,\epsilon}} \psi dv - \psi(x) = \chi(x) - \psi(x),$$

где $K_{x,\epsilon}$ — шар радиуса ϵ с центром в точке x , а dv — элемент объема.

Для функции $U_g \psi = \psi_1$ имеем аналогичное равенство

$$\Delta_\epsilon \psi_1(x) = \chi_1(x) - \psi_1(x).$$

Ясно, что $\chi_1(x) = \chi(g^{-1}x)$, $\psi_1(x) = \psi(g^{-1}x)$, откуда

$$\Delta_\epsilon U_g = U_g \Delta_\epsilon.$$

Остается заметить, что

$$\Delta \psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{10}{\epsilon^3} \Delta_\epsilon \psi,$$

как легко проверить, разлагая ψ по формуле Тейлора и интегрируя члены первых двух порядков относительно ε . В пределе получаем

$$\Delta U_g \psi(x) = U_g \Delta \psi(x). \quad (6.4.5)$$

Далее, в силу сферической симметрии, $V(g^{-1}x) = V(x)$, откуда

$$\begin{aligned} V U_g \psi(x) &= V(x) \psi(g^{-1}x) = V(g^{-1}x) \psi(g^{-1}x) = \\ &= U_g (V \psi(x)) = U_g V \psi(x), \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

и (6.4.4) доказано.

Представление алгебры Ли, соответствующей группе вращений. $SO(3)$ есть трехмерная группа Ли (§ 4.2 (h)). Алгебра Ли группы $SO(3)$ состоит из операторов, изображаемых антисимметрическими матрицами с чисто мнимыми коэффициентами (см. таблицу в § 4.6). Ввиду важности этого результата мы проверим его следующим образом. Обозначим через ϑ операцию транспонирования матрицы. Тогда

$$\vartheta e^{iA} = e^{i\vartheta A}. \quad (6.4.7)$$

Если A — антисимметрическая чисто мнимая матрица, то $\vartheta A = -A$, откуда, в силу (4.6.5),

$$\vartheta e^{iA} = e^{-iA} = (e^{iA})^{-1}.$$

Так как e^{iA} — действительная матрица, последнее соотношение означает, что e^{iA} ортогональна.

Далее, согласно (4.6.3),

$$\det e^{iA} = e^{\text{Sp}(iA)} = 1;$$

следовательно, e^{iA} принадлежит группе $SO(3)$. Напомним, что алгебра Ли группы $SO(3)$ обозначается через $ASO(3)$. В § 4.7 мы определили понятие представления алгебры Ли и установили связь между представлениями алгебры Ли и соответствующей ей группы Ли. Перенесем эту связь (без строгого обоснования!) на бесконечномерные представления. По аналогии с § 4.7, представление P группы Ли $SO(3)$ в гильбертовом пространстве $C(\infty)$ определяет представление \tilde{P} в том же пространстве алгебры Ли $ASO(3)$. Именно, если A — оператор из $ASO(3)$, то

представляющий A оператор $\tilde{A} = \tilde{P}(A)$ определяется тождеством

$$P(e^{itA}) = e^{it\tilde{A}}, \quad (6.4.8)$$

где t — произвольное действительное число (ср. (4.7.2)).

Полагая $e^{itA} = g_t$, получаем из (6.4.8):

$$\tilde{A} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(g_t) - \epsilon(\infty)}{it}, \quad (6.4.9)$$

где $\epsilon(\infty)$ — тождественный оператор в гильбертовом пространстве. Заметив теперь, что в нашем случае представляющий g_t оператор $P(g_t) = U_{g_t}$, подставим в (6.4.4) $g = g_t$; в силу (6.4.9) после предельного перехода получаем

$$H\tilde{A} = \tilde{A}H. \quad (6.4.10)$$

Итак, оператор энергии H перестановочен со всеми операторами в $C(\infty)$, представляющими алгебру Ли группы $SO(3)$.

Перестановочные соотношения в алгебре Ли $ASO(3)$.

Заметим, что ортогональная матрица позволяет построить линейный оператор не только в действительном евклидовом пространстве R^3 , но и в комплексном пространстве $C(3)$, причем полученный таким образом оператор унитарен. Таким образом, мы получаем унитарное представление группы $SO(3)$ степени 3. Операторы алгебры Ли $ASO(3)$ действуют также в пространстве $C(3)$; мы исследуем их детально ввиду их важного значения в физике.

Нам понадобится специальный базис в $ASO(3)$. Чтобы построить этот базис, фиксируем в евклидовом трехмерном пространстве $R(3)$ ось z и рассмотрим в $SO(3)$ однопараметрическую подгруппу вращений g_t вокруг этой оси. Параметр t при этом будет пропорционален углу поворота; умножая параметр на постоянную, мы можем просто считать, что t — угол поворота. Определим оператор A формулой

$$A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g_t - \epsilon(3)}{it}. \quad (6.4.11)$$

Легко показать, что A — оператор из алгебры Ли $ASO(3)$ (это построение объясняет, почему операторы из $ASO(3)$

в старой литературе называются «инфинитезимальными вращениями»).

g_t изображается в координатах матрицей

$$\begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.4.12)$$

Следовательно, оператор A изображается матрицей (см. (6.4.11))

$$A_3 = \frac{1}{i} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.4.13)$$

Аналогично, вращениям вокруг осей x , y соответствуют операторы с матрицами

$$A_1 = \frac{1}{i} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.4.14)$$

$$A_2 = \frac{1}{i} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.4.15)$$

Ясно, что A_1 , A_2 , A_3 составляют базис, через который все антисимметрические чисто мнимые матрицы выражаются с действительными коэффициентами. Иначе говоря, операторы A_1 , A_2 , A_3 — «внутренние» образующие алгебры Ли $ASO(3)$ (ср. § 4.5).

Можно показать, что все операторы алгебры Ли $ASO(3)$ могут быть получены таким же образом, как «инфинитезимальные вращения» вокруг всевозможных осей.

Найдем теперь перестановочные соотношения для образующих A_1 , A_2 , A_3 . Непосредственный подсчет показывает, что

$$[A_1, A_2] = iA_3, [A_2, A_3] = iA_1, [A_3, A_1] = iA_2. \quad (6.4.16)$$

Рассмотрим теперь произвольное унитарное представление P группы $SO(3)$. Все операторы \tilde{A} , представляющие алгебру Ли $ASO(3)$, эрмитовы (см. § 4.7). Только такие операторы, согласно принципу, изложенному в § 6.3, могут соответствовать наблюдаемым.

По самому определению представления алгебры Ли имеем

$$\frac{1}{i} [\tilde{P}(A_1), \tilde{P}(A_2)] = \tilde{P}\left(\frac{1}{i} [A_1, A_2]\right), \dots \quad (6.4.17)$$

Для эрмитовых операторов $M_k = \tilde{P}(A_k)$ из (6.4.16), (6.4.17) вытекают перестановочные соотношения

$$[M_1, M_2] = iM_3, \quad [M_2, M_3] = iM_1, \quad [M_3, M_1] = iM_2. \quad (6.4.18)$$

Общий вывод соотношений (6.4.18), приведенный выше и пригодный для любого унитарного представления $SO(3)$, принадлежит фон Нейману и Йордану (1927 г.).

Операторы момента. Найдем вид операторов M_1, M_2, M_3 в частном случае, когда пространство представления есть гильбертово пространство $C(\infty)$ волновых функций. Согласно процедуре, описанной выше (см. (6.4.9), (6.4.11)),

$$\begin{aligned} \tilde{A}_3 \psi(x, y, z) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{it} [U_{gt} \psi(x, y, z) - \psi(x, y, z)] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{it} [\psi(x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t, z) - \psi(x, y, z)] = \\ &= \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi(x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t, z) \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{1}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x, y, z). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{i} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad M_2 = \frac{1}{i} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ M_3 &= \frac{1}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (6.4.19)$$

Пользуясь конкретными выражениями (6.4.19) операторов момента M_1, M_2, M_3 , нетрудно снова получить перестановочные соотношения (6.4.18); однако общий вывод, приведенный выше, имеет то преимущество, что со-

храняет силу для *любого* унитарного представления группы $SO(3)$. Важность этого замечания будет видна из дальнейшего изложения.

Рассмотрим теперь произвольное собственное подпространство C_E оператора энергии H ; как уже было сказано в § 6.3, такие подпространства конечномерны. Согласно (6.4.4), H перестановочен со всеми операторами U_g , откуда для всякого вектора ψ из C_E находим:

$$HU_g\psi = U_gH\psi = U_g(E\psi) = EU_g\psi;$$

значит, *подпространство C_E инвариантно относительно операторов U_g* . Рассматривая операторы U_g только на C_E , мы получаем, следовательно, конечномерное представление группы $SO(3)$. Обозначим (времененно) это представление через P_E , а его степень (размерность P_E) — через r_E .

Мы видим, что *если оператор энергии H обладает сферической симметрией, то в каждом собственном подпространстве C_E существует представление группы $SO(3)$* . Аналогичным образом, любое свойство симметрии H приводит к построению представлений группы, относительно которой H инвариантен. Этот результат имеет исключительно важное значение для физики.

Можно показать, что C_E инвариантно также относительно операторов $\tilde{P}(A)$, представляющих алгебру Ли; для этого надо только вместо (6.4.4) воспользоваться свойством перестановочности (6.4.10).

В частности, операторы M_k можно рассматривать *только на C_E* . Каждый из них, например, M_3 , есть эрмитов оператор на C_E и, следовательно, имеет на C_E всего r_E независимых собственных векторов.

Поскольку M_1, M_2, M_3 равноправны, мы выделим один из этих операторов, например, M_3 ; посмотрим, какие собственные значения может иметь оператор M_3 в пространстве волновых функций C_∞ (таким образом, в этом месте мы *впервые* существенно используем специальный вид (6.4.2) представления P ; заметим, что все остальные выводы опирались только на свойство перестановочности (6.4.4)!).

Согласно (6.4.19), уравнение собственных значений имеет вид

$$\frac{1}{i} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = m \psi. \quad (6.4.20)$$

Введем цилиндрические координаты (r, φ, z) с осью z ; тогда (6.4.20) можно записать в виде

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = m \psi. \quad (6.4.21)$$

Интегрируя, находим

$$\psi = f(r, z) e^{im\varphi}. \quad (6.4.22)$$

По самому смыслу координаты φ должно быть $\psi(r, 2\pi, z) = \psi(r, 0, z)$; но тогда m может быть только целым числом.

§ 6.5. Алгебраические свойства операторов моментного типа

Теперь мы станем на более широкую точку зрения, чем в § 6.4. Эта точка зрения охватывает как волновую механику, так и матричную, и основана на абстрактном представлении о бесконечномерном комплексном евклидовом пространстве S , векторы которого должны удовлетворять лишь изложенным в начале § 1.1 аксиомам. Природа этих векторов несущественна: они могут быть, например, волновыми функциями Шредингера или последовательностями Гейзенберга; могут быть и другие реализации S . Такая общая точка зрения, впервые предложенная фон Нейманом (1932 г.), изображает состояние физической системы вектором некоторого абстрактного пространства, устраняя все несущественное в теоретических построениях.

В S предполагается заданным эрмитов оператор энергии H , собственные подпространства которого S_E конечномерны.

Далее, мы предполагаем, что дано некоторое локальное представление P группы $SO(3)$ операторами, действующими в S , т. е. представление, определенное лишь в некоторой окрестности тождественного вращения. На-

помним, что для построения моментов, т. е. представления алгебры Ли $ASO(3)$, нам нужны были только *малые* вращения.

В этом параграфе под представлением группы $SO(3)$ понимается локальное представление; некоторые из рассматриваемых ниже представлений D_j могут не существовать «в целом».

Потребуем, чтобы все представляющие операторы были перестановочны с H . Тогда справедливы все результаты § 6.4, за исключением формул (6.4.19) и заключения в конце § 6.4, опирающихся на специфические свойства волновых функций.

В частности, каждое собственное подпространство C_E оператора энергии инвариантно относительно операторов M_k .

Мы можем отвлечься от происхождения C_E и заняться исследованием эрмитовых операторов M_k , удовлетворяющих соотношениям (6.4.18), на произвольном конечномерном комплексном евклидовом пространстве C_E .

Представления D_j . Введем вспомогательные операторы

$$M_+ = M_1 + iM_2, \quad M_- = M_1 - iM_2. \quad (6.5.1)$$

Эти операторы — *не эрмитовы*, следовательно, в отличие от H и M_k , не соответствуют никаким наблюдаемым. Заметим, что M_+ и M_- взаимно сопряжены.

Из перестановочных соотношений (6.4.18) сразу же следует, что

$$[M_3, M_+] = M_+, \quad [M_3, M_-] = -M_-, \quad [M_+, M_-] = 2M_3. \quad (6.5.2)$$

Пользуясь этими соотношениями, мы докажем сейчас лемму, из которой видна роль операторов M_+ , M_- :

Пусть вектор x есть собственный вектор оператора M_3 , принадлежащий собственному значению m ; тогда M_+x и M_-x суть собственные векторы M_3 , принадлежащие, соответственно, собственным значениям $m + 1$, $m - 1$, если только эти векторы не равны нулю.

В самом деле,

$$\begin{aligned} M_3M_+x &= (M_+M_3 + M_+)x = M_+(mx) + M_+x = \\ &= (m + 1)M_+x, \end{aligned} \quad (6.5.3)$$

и аналогично

$$M_3 M_- x = (m - 1) M_- x. \quad (6.5.4)$$

Пусть j — наибольшее собственное значение оператора M_3 (рассматриваемого на C_E); такое значение существует, так как C_E конечномерно и, следовательно, может содержать лишь конечное число независимых собственных векторов. Обозначим через x_j некоторый нормированный собственный вектор M_3 , принадлежащий собственному значению j . Тогда, согласно лемме, $M_+ x_j = 0$, так как иначе $j + 1$ также было бы собственным значением. С другой стороны, векторы

$$x_{j-1} = M_- x_j, \quad x_{j-2} = M_- x_{j-1}, \dots, \quad x_{m-1} = M_- x_m, \quad (6.5.5)$$

если только они не равны нулю, суть собственные векторы M_3 , принадлежащие собственным значениям $j - 1, j - 2, \dots$. Ввиду конечномерности C_E этот ряд векторов обрывается на нулевом векторе; пусть наименьший индекс m , при котором $x_m \neq 0$, равен j .

Покажем, что

$$M_+ x_m = \rho_m x_{m+1}, \quad (6.5.6)$$

где ρ_m — целое число, и найдем это число. Ясно, что это верно при $m = j$, причем $\rho_j = 0$. Покажем, что если (6.5.6) верно для данного m и ρ_m — целое, то

$$M_+ x_{m-1} = \rho_{m-1} x_m,$$

где ρ_{m-1} — также целое.

Действительно,

$$\begin{aligned} M_+ x_{m-1} &= M_+ M_- x_m = (M_- M_+ + 2M_3) x_m = \\ &= M_- (\rho_m x_{m+1}) + 2m x_m = (\rho_m + 2m) x_m, \end{aligned}$$

откуда

$$\rho_{m-1} = \rho_m + 2m.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \rho_j &= 0, \quad \rho_{j-1} = 2j, \quad \rho_{j-2} = 2[j + (j - 1)], \dots, \\ \rho_m &= 2[j + (j - 1) + \dots + (m + 1)] \end{aligned}$$

или

$$\rho_m = j(j + 1) - m(m + 1). \quad (6.5.7)$$

Возьмем теперь в качестве m значение $j' - 1$, где j' — число, определенное выше. Тогда $x_{j'-1} = 0$, но $x_{j'} \neq 0$, и (6.5.6) означает, что $\rho_{j'-1} = 0$. Согласно (6.5.7), $j(j+1) - (j' - 1)j' = 0$. При заданном j это уравнение имеет только два решения: $j' = j + 1$ и $j' = -j$. Первое решение должно быть отброшено, так как, по построению, число $j \leq j'$.

Итак, $j' = -j$, и мы получаем векторы

$$x_{-j}, x_{-j+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, \quad (6.5.8)$$

связанные соотношениями

$$\left. \begin{aligned} M_3 x_m &= m x_m, \\ M_+ x_m &= [j(j+1) - m(m+1)] x_{m+1}, \\ M_- x_m &= x_{m-1}. \end{aligned} \right\} \quad (6.5.9)$$

Векторы x_m ортогональны друг другу, так как принадлежат различным собственным значениям эрмитова оператора M_3 . Но эти векторы не нормированы; нормируем их, полагая $v_m = x_m / |x_m|$. Тогда в ортонормированном базисе $\{v_m\}$ матричные элементы сопряженных операторов M_+ , M_- связаны соотношением (см. (1.2.12)):

$$(k | M_+ | i) = \overline{(i | M_- | k)}. \quad (6.5.10)$$

Из (6.5.9), далее, ясно, что

$$\left. \begin{aligned} (k | M_+ | i) &= 0 \quad \text{при } k \neq i + 1, \\ (k | M_- | i) &= 0 \quad \text{при } k \neq i - 1, \end{aligned} \right\} \quad (6.5.11)$$

$$\begin{aligned} (k | M_- M_+ | i) &= 0 \quad (i \neq k), \quad (m | M_- M_+ | m) = \\ &= j(j+1) - m(m+1). \end{aligned} \quad (6.5.12)$$

В силу (6.5.10), (6.5.11) отсюда следует

$$\begin{aligned} (m-1 | M_- | m) (m | M_+ | m-1) &= \\ &= |(m-1 | M_- | m)|^2 = |(m | M_+ | m-1)|^2 = \\ &= j(j+1) - m(m-1), \\ (m | M_+ | m-1) &= (m-1 | M_- | m) = \\ &= \pm \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}. \end{aligned}$$

Чтобы найти знаки этих матричных элементов, заметим, что x_m в (6.5.9) отличается от v_m положительным нормирующим множителем; поэтому

$$M_+ v_m = \lambda v_{m+1}, \quad M_- v_m = \mu v_{m-1},$$

где $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$. Отсюда получаем ненулевые матричные элементы M_+ , M_- :

$$(m | M_+ | m-1) = (m-1 | M_- | m) = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}. \quad (6.5.13)$$

Теперь нетрудно с помощью (6.5.1) найти ненулевые матричные элементы M_1 , M_2 :

$$\left. \begin{aligned} (m-1 | M_1 | m) &= (m | M_1 | m-1) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(j+m)(j-m+1)}, \\ (m-1 | M_2 | m) &= -(m | M_2 | m-1) = \\ &= \frac{i}{2} \sqrt{(j+m)(j-m+1)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.5.14)$$

Наконец, матричные элементы M_3 суть

$$(k | M_3 | i) = 0 \quad (i \neq k), \quad (m | M_3 | m) = m^*. \quad (6.5.15)$$

Введем теперь оператор

$$\mathbf{M}^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 \quad (6.5.16)$$

(следует подчеркнуть, что оператор \mathbf{M} не вводится, и потому \mathbf{M}^2 следует рассматривать как цельный символ). Легко проверить соотношение

$$M_- M_+ = \mathbf{M}^2 - M_3^2 - M_3. \quad (6.5.17)$$

Так как каждый вектор v_m является одновременно собственным вектором операторов $M_- M_+$, M_3 , M_3^2 , то все v_m — собственные векторы \mathbf{M}^2 .

Из (6.5.12) и (6.5.15) немедленно следует, что все эти векторы принадлежат одному и тому же собственному значению $j(j+1)$ оператора \mathbf{M}^2 .

*) Заметим, что матрица оператора M_3 в случае $j = 1$ отлична от (6.4.13) вследствие другого выбора базиса в $C(3)$. Следует также иметь в виду, что индексы, нумерующие матричные элементы, пробегают значения от $-j$ до j (а не от 1 до $2j+1$, как обычно).

Итак, на подпространстве C_j , порожденном векторами

$$v_{-j}, v_{-j+1}, \dots, v_{j-1}, v_j, \quad (6.5.18)$$

оператор M^2 есть растяжение:

$$M^2 x = j(j+1)x. \quad (6.5.19)$$

Мы полностью определили действие операторов M_k на подпространстве C_j . Поскольку C_j инвариантно относительно M_1, M_2, M_3 , служащих образующими для представляющей алгебры Ли $\dot{P}ASO(3)$, C_j инвариантно также относительно всех операторов \dot{A} , представляющих $ASO(3)$.

Из смысла операторов $ASO(3)$ как «инфинитезимальных вращений» нетрудно вывести, что C_j инвариантно также относительно операторов Pg , представляющих конечные вращения (мы опускаем строгое доказательство). Таким образом, мы получаем представление $SO(3)$ операторами, действующими в C_j ; обозначим это представление через D_j . Степень представления D_j равна размерности подпространства C_j , т. е. числу базисных векторов (6.5.18). Напомним теперь, что j — наибольшее собственное значение M_3 — не должно быть обязательно целым, но в ряду $-j, -j+1, \dots, j-1, j$ разность между двумя последовательными числами равна 1. Следовательно, j есть целое кратное $1/2$; такое число, если оно не целое, мы будем называть *полуцелым*. Степень представления D_j равна, таким образом, $2j+1$.

Покажем, что D_j — неприводимое представление. В самом деле, пусть C' — инвариантное подпространство C_j ; тогда в C' найдется собственный вектор x' эрмитова оператора M_3 . Поскольку векторы (6.5.18) образуют полную систему собственных векторов этого оператора в C_j , x' должен быть кратным некоторого из v_m . Но все произведения операторов M_1, M_2, M_3 и линейные комбинации этих произведений переводят x' в векторы из C' , в силу инвариантности C' ; а это значит, что все векторы (6.5.18) принадлежат C' и $C' = C_j$.

Если представление P группы $SO(3)$ в собственном пространстве оператора энергии C_E неприводимо, то это представление эквивалентно одному из представлений D_j . Такая ситуация часто встречается в квантовой механике.

Изложенный метод построения представлений D_j принадлежит Борну, Гейзенбергу и Йордану (1926 г.); мы воспользовались, кроме того, изложением Ван дер Вардена (1932 г.).

Операторы Окубо. Окубо (1962 г.) предложил другую запись для операторов моментного типа, лучше поддающуюся обобщению в направлении, нужном для теории элементарных частиц. При этой записи операторы нумеруются по системе, напоминающей нумерацию элементов матрицы, что особенно удобно в вычислениях. Введем операторы Окубо

$$\bar{a}_1^1 = M_3, \quad \bar{a}_2^2 = -M_3, \quad \bar{a}_1^2 = M_+, \quad \bar{a}_2^1 = M_-. \quad (6.5.20)$$

Тогда имеем, очевидно, соотношения

$$\bar{a}_1^1 + \bar{a}_2^2 = 0, \quad (6.5.21)$$

$$[\bar{a}_\beta^x, \bar{a}_\delta^y] = \delta_\delta^x \bar{a}_\beta^y - \delta_\beta^y \bar{a}_\delta^x, \quad (6.5.22)$$

последнее из которых является следствием (6.4.18). По отношению к алгебре Ли операторы Окубо играют роль *внешних* (не эрмитовых) образующих (§ 4.5 (с)). Свойства этих операторов весьма напоминают свойства двухрядных операторов Окубо § 4.5. Однако операторы \bar{a}_β^x представляют (в некотором комплексном евклидовом пространстве размерности $2j + 1$) алгебру Ли группы вращений *трехмерного действительного* евклидова пространства $R(3)$, в то время как операторы (4.5.15) действуют в *двумерном комплексном пространстве* $C(2)$. Позже мы исследуем возникающую здесь замечательную связь.

СПИН И ГРУППА $SU(2)$

§ 7.1. Введение спина в квантовую механику

Мотивировка. Ряд экспериментальных фактов привел к представлению о том, что у электрона есть собственный магнитный момент, не связанный с его орбитальным «вращением» вокруг ядра. Представление о собственном магнитном моменте электрона позволило дать удовлетворительное качественное описание аномального эффекта Зеемана, расщепления спектральных линий щелочных металлов и т. п. Уленбек и Гаудсмит (1925 г.) объяснили этот магнитный момент существованием у электрона механического момента, названного *спином*. Однако такое представление наталкивалось на серьезные трудности. Прежде всего, оно противоречило представлению об элементарной частице как о «точечном» объекте; говорить о «вращении вокруг своей оси» заряженного объекта, способном вызвать магнитный эффект кругового тока, не имеет смысла.

Гипотеза о спине не только противоречила наглядным представлениям, но, что значительно хуже, не находила себе места в аппарате волновой механики Шредингера. В самом деле, опыт Штерна и Герлаха мог быть истолкован лишь в предположении, что *электрон в магнитном поле может быть в двух, и только двух, «спиновых состояниях»*, которые можно грубо изобразить как вращения в двух направлениях вокруг оси, направленной вдоль поля. В соответствии с принципами волновой механики эти два состояния следовало бы искать как собственные функции «оператора спина», имеющего *ровно две* собственные функции.

Далее, естественно было ожидать, что операторы спина, связанные с моментом электрона, должны возникать

из некоторого представления группы вращений $SO(3)$ по образцу, описанному в § 6.4. Итак, надо было найти эрмитовы операторы $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, действующие в пространстве волновых функций $C(\infty)$ и удовлетворяющие следующим условиям:

1) Операторы $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ суть операторы моментного типа, т. е. удовлетворяют перестановочным соотношениям вида (6.4.18).

2) Каждый из операторов σ_h имеет две, и только две, независимые собственные функции с данным значением энергии H .

Однако легко видеть, что этим требованиям удовлетворить невозможно. В самом деле, если в подпространстве C_E (§ 6.4) пространства $C(\infty)$ задано некоторое представление P группы вращений $SO(3)$, то соответствующий оператор моментного типа может иметь только *целые* собственные значения (конец § 6.4). Но тогда из общего алгебраического исследования, проведенного в § 6.5, вытекает, что P на некотором подпространстве C_j определяет неприводимое представление D_j с целым (но не полуцелым) j . Степень этого представления $2j + 1$, следовательно, *нечетна*. Оставляя в стороне тривиальный случай $j = 0$, в котором есть только *одно* собственное значение 0 (слишком мало!), мы получаем по крайней мере *три* различных собственных значения оператора σ_3 . Итак, формулированные выше физические представления о спине электрона оказались несовместимыми с волновой механикой Шредингера, описывавшей состояние частицы волновой функцией $\psi(x, y, z)$. С другой стороны, изложенная в § 6.5 схема фон Неймана, в которой состояние частицы описывается вектором *абстрактного* пространства, природа которого не уточняется, не находится в противоречии с требованиями 1), 2), наложенными на операторы спина: достаточно взять $j = 1/2$, чтобы получить *два* собственных вектора $v_{-1/2}, v_{1/2}$! Естественно предположить, что состояние частицы *со спином* должно изображаться вектором некоторого бесконечномерного евклидова пространства, *отличного* от пространства волновых функций Шредингера. Такое пространство, по существу, и было построено Паули, которому принадлежит первая теория спина электрона (1927 г.).

Идея «удвоения» пространства волновых функций, предложенная Паули, имеет решающее значение для понимания современной теории элементарных частиц. Мы изложим эту идею сначала в ее оригинальной форме, а затем в удобном алгебраическом видоизменении, подсказываемом общей теорией представлений. Согласно Паули, спиновые состояния аналогичны координатам в том смысле, что они должны быть введены как независимые переменные в волновую функцию. Именно, Паули рассматривает нормированные функции

$$\psi(x, y, z, \sigma), \quad (7.1.1)$$

где x, y, z — координаты, а σ — «спиновая переменная», принимающая только два значения, соответствующих спиновым состояниям; в качестве таких значений возьмем, например, 1 и 2. (Подчеркнем, что числа 1, 2 служат лишь для нумерации спиновых состояний, так что их выбор вполне условен. Далее, зависимость «волновой функции со спином» от времени явно не указывается, поскольку мы пока не занимаемся динамикой и изучаем частицу в фиксированный момент времени).

С помощью функции (7.1.1) определяется вероятность того, что частица находится в объеме

$$[x, y, z; x + dx, y + dy, z + dz]$$

и в спиновом состоянии σ :

$$dW = \psi(x, y, z, \sigma) dx dy dz.$$

Так как пространство волновых функций со спином должно быть линейным, мы должны допустить (в качестве волновых функций) также линейные комбинации вида

$$c_1\psi(x, y, z, 1) + c_2\psi(x, y, z, 2). \quad (7.1.2)$$

Эти функции можно истолковать как изображающие «смешанные состояния» с неопределенным значением спина.

Теперь перейдем к построению бесконечномерного комплексного евклидова пространства C_{sp} , вектор которого будет изображать состояние частицы со спином. Поставим в соответствие функциям $\psi(x, y, z, 1)$, $\psi(x, y, z, 2)$ векторы ψ_1, ψ_2 , принадлежащие гильбертову простран-

ству волновых функций $C(\infty)$. Тогда интересующее нас пространство должно состоять из *формальных* линейных комбинаций с комплексными коэффициентами

$$c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \quad (7.1.3)$$

(формальных потому, что простые линейные комбинации были бы обычными волновыми функциями, в которых не была бы отражена «доля» спиновых состояний ψ_1, ψ_2 ; таким образом, плюс в (7.1.3) не следует понимать в смысле обычного сложения функций). Вспомним теперь определение тензорного произведения комплексных евклидовых пространств (§ 2.3) и построим тензорное произведение

$$C_{sp} = C(2) \otimes C(\infty). \quad (7.1.4)$$

Фиксируем базис e_1, e_2 в $C_2^{\mathbb{C}}(2)$; тогда всякий вектор

$$\psi_{sp} = \sum_j x_j \otimes \psi_j \quad (7.1.5)$$

из C_{sp} можно представить в виде

$$\psi_{sp} = c_1 e_1 \otimes \psi_1 + c_2 e_2 \otimes \psi_2, \quad (7.1.6)$$

где ψ_1 и ψ_2 — нормированные функции от x, y, z , определяемые вектором (7.1.5) с точностью до градиентного преобразования (умножения на число, по модулю равное единице). Сравнение (7.1.6) с формальной суммой (7.1.3) подсказывает, что пространство (7.1.4) и есть адекватное математическое описание того пространства «волновых функций со спином», которое мы хотели построить.

Волновая механика со спином. Теперь можно, оставив в стороне предыдущие эвристические соображения, развить волновую механику над пространством (7.1.4). В ее построении основную роль должны играть, как и в первоначальной волновой механике *Шредингера*, эрмитов оператор энергии H и эрмитовы операторы моментного типа L_1, L_2, L_3 , действующие на пространстве C_{sp} . Так как мы излагаем лишь те вопросы квантовой механики, которые необходимы для нашей цели, то нас будут здесь интересовать лишь операторы L_h . Естественно искать их с помощью некоторого представления группы $SO(3)$, как в § 6.4. С другой стороны, существует стандартный способ

построения представлений групп в тензорном произведении пространств (ср. § 4.3): если сначала построить некоторое представление P_2 группы $SO(3)$ операторами, действующими в $C(2)$, и некоторое представление P_∞ группы $SO(3)$ операторами, действующими в $C(\infty)$, то из них строится *произведение представлений*

$$P_{sp} = P_2 \otimes P_\infty \quad (7.1.7)$$

по формуле

$$P_{sp}(g) = P_2(g) \otimes P_\infty(g) \quad (7.1.8)$$

(см. (4.3.5)). В качестве P_∞ в квантовой механике берется представление $P_\infty(g) = U_g$, построенное в § 6.4.

Прежде чем перейти к построению P_2 , которое нас главным образом и интересует, сделаем следующее замечание. Обозначим через ϵ_k тривиальное представление, сопоставляющее каждому g из $SO(3)$ тождественный оператор в $C(k)$. Тогда, обобщая на бесконечномерный случай формулу (4.7.8), имеем $\tilde{P}_{sp} = \tilde{P}_2 \otimes \epsilon_\infty + \epsilon_2 \otimes \tilde{P}_\infty$,

$$\tilde{P}_{sp}(A_k) = \tilde{P}_2(A_k) \otimes \epsilon(\infty) + \epsilon(2) \otimes \tilde{P}_\infty(A_k). \quad (7.1.9)$$

Первое слагаемое справа называется оператором *орбитального момента* частицы и обозначается, как и в случае «бесспиновой» частицы, через M_k ; второе слагаемое называется *оператором спина* частицы и обозначается через J_k . Наконец, оператор в левой части называется оператором *полного момента* частицы; мы обозначим его через K^*). (7.1.9) записывается теперь в виде

$$K_k = M_k + J_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (7.1.10)$$

Таков строгий метод введения спина в квантовую механику. Ясное понимание этого метода позволяет, как мы увидим дальше, надлежащим образом обобщить его и прийти к классификации элементарных частиц по их «обобщенным спиновым характеристикам».

А теперь займемся построением представления P_2 .

*) Мы вынуждены были здесь отступить от обычного обозначения спина буквой S , поскольку эта последняя применяется дальше для обозначения так называемого *странного спина*.

§ 7.2. Группа вращений, группа $SU(2)$ и их представления

Связь между группами $SO(3)$ и $SU(2)$. Интересующее нас представление P_2 — конечномерное представление группы $SO(3)$. Техника, развитая в § 6.5, позволяет получить в явном виде конечномерные представления алгебры Ли $ASO(3)$ (см. (6.5.13) — (6.5.15)). Соответствующие представления D_j группы $SO(3)$ могут быть найдены по представлениям $ASO(3)$, по крайней мере, в локальном смысле (см. начало § 6.5). Но мы не хотим заниматься здесь общей процедурой восстановления группы Ли по представлению ее алгебры Ли. Нас интересует теперь случай, когда степень представления $2j + 1 = 2$, т.е. $j = 1/2$. Мы построим $D_{1/2}$ непосредственно, а затем уже убедимся, что соответствующее представление алгебры Ли совпадает с указанным в § 6.5.

Существует тесная связь между группами $SO(3)$ и $SU(2)$, позволяющая заменить построение представлений $SO(3)$ аналогичной задачей для $SU(2)$, уже решенной в § 5.1. Чтобы обнаружить эту связь, рассмотрим подробнее неприводимое представление $SU(2)$ степени 3 (§ 5.1). Для этого определим числа $\epsilon_{\alpha\beta}$,

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0, \quad \epsilon_{12} = 1, \quad \epsilon_{21} = -1, \quad (7.2.1)$$

и положим, в фиксированной системе координат,

$$T_{\beta}^{\alpha} = \epsilon_{\beta\gamma} T^{\alpha\gamma}. \quad (7.2.2)$$

Формула (7.2.2) устанавливает изоморфизм между тензорными пространствами $C(2,0)$ и $C(1,1)$, при котором представляющему оператору ΠU соответствует оператор в $C(1,1)$, определяемый равенством

$$T_{\beta}^{\alpha} = U_{\sigma}^{\alpha} (U^{-1})_{\beta}^{\sigma} T_{\tau}^{\sigma}. \quad (7.2.3)$$

Мы будем обозначать этот оператор по-прежнему через ΠU или \bar{U} . Рассмотрим теперь в пространстве $C(1,1)$ всех один раз ковариантных и один раз контравариантных

тензоров подмножество R всех тензоров вида

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{bmatrix}, \quad (7.2.4)$$

где x, y, z — действительные числа.

Иначе говоря, тензоры множества R изображаются в некоторой (и, следовательно, произвольной) системе координат бесследными эрмитовыми матрицами; множитель $1/\sqrt{2}$ нужен для нормировки, как выяснится из дальнейшего. Ясно, что сумма двух тензоров из R снова принадлежит R и что *действительное* кратное тензора из R принадлежит R . Таким образом, R — *действительное векторное пространство*. Согласно определению скалярного умножения в $C(1,1)$, тензоры

$$\sigma'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (7.2.5)$$

образуют ортонормированный базис в R , причем любой тензор из R (7.2.4) представим в виде

$$T = x\sigma'_1 + y\sigma'_2 + z\sigma'_3. \quad (7.2.6)$$

Заметим, что матрицы (7.2.5) пропорциональны матрицам Паули (4.5.11).

Итак, R — действительное трехмерное евклидово пространство, вложенное в комплексное евклидово пространство (которое имеет *комплексную* размерность три и, следовательно, *действительную* размерность шесть). Поэтому дальше мы будем писать $R(3)$ вместо R .

Легко убедиться, что индуцированные операторы \bar{U} переводят тензоры (7.2.4) в тензоры того же вида; так как эти операторы унитарны и унимодулярны, то каждый из них определяет в $R(3)$ вращение, не меняющее ориентации пространства (ортогональное преобразование с определителем 1). Можно также непосредственно проверить, что операторы \bar{U} сохраняют сумму $x^2 + y^2 + z^2$; для этого надо принять во внимание специальную форму матриц U (1.2.20).

Итак, мы поставили в соответствие каждому элементу U группы $SU(2)$ некоторое собственное вращение $\varphi(U)$

пространства $R(3)$, т. е. элемент группы $SO(3)$. Легко видеть, что при этом получается представление φ группы $SU(2)$ операторами группы $SO(3)$, т. е. тождественному оператору соответствует тождественное вращение и произведению операторов — произведение вращений.

Представление φ обладает следующими двумя свойствами:

1) Образом φ является вся группа $SO(3)$.

В самом деле, каждое собственное вращение может быть получено путем трех последовательных вращений: сначала вокруг оси z , затем вокруг оси y и, наконец, снова вокруг оси z . Но вращение на угол 2β вокруг оси y является образом матрицы

$$\begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix},$$

а вращение на угол 2γ вокруг оси z — образом матрицы

$$\begin{bmatrix} e^{-i\gamma} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma} \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\varphi(SU(2)) = SO(3).$$

2) Каждое вращение из $SO(3)$ является образом в точности двух матриц из $SU(2)$. Чтобы показать это, заметим, что

$$\varphi(\epsilon) = \varphi(UU^{-1}) = \varphi(U)\varphi(U^{-1})$$

есть тождественный оператор g_ϵ группы $SO(3)$, откуда

$$\varphi(U^{-1}) = [\varphi(U)]^{-1}.$$

Поэтому из

$$\varphi(U_1) = \varphi(U_2)$$

следует

$$\varphi(U_1U_2^{-1}) = \varphi(U_1)\varphi(U_2^{-1}) = \varphi(U_1)[\varphi(U_2)]^{-1} = g_\epsilon.$$

Таким образом, все вращения из $SO(3)$ имеют одинаковое число прообразов в $SU(2)$. Достаточно, следовательно, проверить, что тождественное вращение имеет в точности два прообраза. Ясно, что такими прообразами

являются

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

и легко показать, что других прообразов тождества нет.

Теперь можно точно описать отношение между группами $SU(2)$ и $SO(3)$: $SO(3)$ двулистно накрывается группой $SU(2)$ с помощью некоторого ее представления φ .

Вспомним теперь, что для построения представлений алгебр Ли играют роль лишь малые вращения (близкие к единичному, ср. § 6.5). Поскольку φ устанавливает локальный изоморфизм групп $SU(2)$ и $SO(3)$ (взаимно однозначное соответствие между окрестностями единиц, переводящее произведение прообразов в произведения образов), то для наших целей — построения представлений алгебр Ли или, что то же, операторов моментного типа — группы $SU(2)$ и $SO(3)$ равноценны. Локальный изоморфизм $SO(3)$ в $SU(2)$, определенный в окрестности тождественного вращения, обозначим через φ^{-1} . Поскольку φ^{-1} есть представление группы $SO(3)$ в двумерном комплексном евклидовом пространстве $C(2)$, локально изоморфное действию в $C(2)$ группы $SU(2)$, то φ^{-1} неприводимо и может быть, следовательно, отождествлено с двумерным представлением $D_{7/2}$, построенным в § 6.5.

Изгнание группы $SO(3)$. Мы можем теперь сопоставить каждому представлению P группы $SO(3)$ представление (в целом!) $P\varphi$ группы $SU(2)$. Обратно, каждому представлению P группы $SU(2)$ можно сопоставить локальное представление $P\varphi^{-1}$ группы $SO(3)$. Роль группы $SO(3)$ в построении представлений объясняется, главным образом, исторической традицией: $SO(3)$ есть группа вращений «обычного», т. е. действительного трехмерного евклидова пространства. Вывод операторов момента M_k в § 6.4 естественно связан с группой $SO(3)$, представление которой получается в гильбертовом пространстве волновых функций. Но, в отличие от операторов орбитального момента, операторы спина σ_k связаны с представлением $SO(3)$ в пространстве $C(2)$, а это пространство никак не связано с группой $SO(3)$; напротив, группа $SU(2)$ естественным образом действует в $C(2)$! Представление груп-

пы $SU(2)$ в пространстве $C(2)$, вполне заменяющее, как мы видели, то представление P_2 , которое мы раньше искали, получается сразу же как *фундаментальное представление*: каждому оператору из $SU(2)$ сопоставляется этот же оператор. Все это наводит на подозрение, что вывод спина из представления группы вращений $SO(3)$ был построен на иллюзорном физическом предположении и что в действительности спин вовсе не связан с вращениями в «обычном» пространстве. Откажемся от наглядного представления о «вращении частицы вокруг своей оси» (мы уже указывали в § 7.1, что это представление противоречит точечному характеру частицы). *Теперь операторы спина σ_k должны рассматриваться как операторы моментного типа, связанные с действием группы $SU(2)$ в пространстве $C(2)$ — «спиновом» пространстве.*

Можно пойти дальше и заменить представления $SO(3)$ представлениями $SU(2)$ во всех вопросах физики; тогда пространство R^3 должно быть совсем оставлено в стороне, как историческая случайность. Мы не будем заниматься этим вопросом.

Представление (7.1.8) может быть изображено схемой

$$\begin{array}{ccc} & SO(3) & \\ P_2 \swarrow & & \searrow P_\infty \\ C(2) & \otimes & C(\infty), \end{array} \quad (7.2.7)$$

в которой правая стрелка соответствует орбитальному моменту, связанному с движением частицы в атоме, а левая — спину, характерному для самой частицы. Так как нас интересует теория элементарных частиц, то характеристики, аналогичные спину, будут иметь для нас основное значение. Поэтому мы сосредоточим внимание на левой стрелке (7.2.7) и, в соответствии с предыдущими соображениями, заменим $SO(3)$ на $SU(2)$.

§ 7.3. Спин в $SU(2)$ -трактовке

Как показывает таблица в § 4.6, алгебра Ли группы $SU(2)$ состоит из эрмитовых бесследных операторов, действующих в $C(2)$. В алгебре $ASU(2)$ (размерность ее равна 3) образующие должны играть роль операторов

спина, в соответствии с изложенными выше соображениями. Паули предложил в качестве образующих операторы, заданные в некотором базисе матрицами (см. (4.5.11)):

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (7.3.1)$$

Напомним их перестановочные соотношения:

$$[\sigma_1, \sigma_2] = i\sigma_3, \quad [\sigma_2, \sigma_3] = i\sigma_1, \quad [\sigma_3, \sigma_1] = i\sigma_2. \quad (7.3.2)$$

Далее, введем матрицы

$$\sigma_+ = \sigma_1 + i\sigma_2, \quad \sigma_- = \sigma_1 - i\sigma_2. \quad (7.3.3)$$

Тогда (в том же базисе, в котором записаны операторы Паули) нетрудно указать собственные векторы оператора σ_3 :

$$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1); \quad (7.3.4)$$

других собственных векторов нет, так как пространство $S(2)$, в котором действуют σ_h , двумерно. Собственные значения равны $\pm 1/2$:

$$\sigma_3 e_1 = 1/2 e_1, \quad \sigma_3 e_2 = -1/2 e_2. \quad (7.3.5)$$

Таким образом, мы получим два возможных значения спина, как собственные значения оператора спина. Далее,

$$\sigma_+ e_1 = e_2, \quad \sigma_- e_2 = e_1.$$

Таким образом, операторы σ_+ , σ_- переводят спиновые состояния друг в друга (ср. § 6.5).

Фундаментальное представление группы $SU(2)$, которым мы здесь воспользовались, соответствует представлению группы $SO(3)$ степени 2, которое мы в § 6.5 обозначили через $D_{1/2}$. Учитывая связь между представлениями групп $SU(2)$ и $SO(3)$, мы можем обозначить представление группы $SU(2)$ любой степени $2j + 1$ через D_j (оно эквивалентно представлению $\text{Sym } 2j$ § 5.1). Тогда D_j стано

вится представлением группы $SU(2)$ в пространстве $C(2j+1)$; ($j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$).

Теперь можно сформулировать теорию спина для частиц с любым числом спиновых состояний $2j+1$. Для этого рассмотрим пространство состояний частицы

$$C(2j+1) \otimes C(\infty) \quad (j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots) \quad (7.3.6)$$

и построим представление группы $SU(2)$

$$D_j \otimes U_g \varphi \quad (7.3.7)$$

в этом пространстве, где U_g — представление, построенное в § 6.4, а D_j — неприводимое представление, о

котором шла речь выше. Как мы знаем, каждое представление P группы Ли определяет представление \tilde{P} соответствующей алгебры Ли. Представление \tilde{D}_j алгебры Ли $ASU(2)$ определяет, как в формуле (7.1.10), операторы полного момента, орбитального момента и спина:

$$J_k = \tilde{D}_j \sigma_k. \quad (7.3.8)$$

Подчеркнем, что операторы σ_k действуют в пространстве $C(2)$ (спиновом пространстве), тогда как операторы J_k , соответствующие σ_k в представлении \tilde{D}_j алгебры Ли $ASU(2)$,

действуют в пространстве $C(2j+1)$. При $j = 1/2$, очевидно, $J_k = \sigma_k$.

Если интересоваться только спиновыми состояниями, то для оператора J_3 , согласно § 6.5, получаем $2j+1$ собственных значений.

$$-j, -j+1, \dots, j-1, j,$$

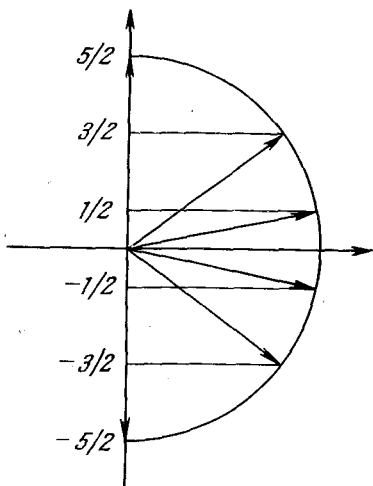


Рис. 1.

которые и представляют собой «возможные значения проекции спина на (произвольно выбранную) ось z ». Операторы $J_+ = J_1 + iJ_2$, $J_- = J_1 - iJ_2$ переводят друг в друга векторы спиновых состояний, согласно формулам (6.5.13). Они тождественны с операторами Окубо \tilde{a}_1^2 , \tilde{a}_2^1 того же представления (см. (6.5.20) — (6.5.22)).

Следующая диаграмма (рис. 1) символически изображает возможные значения проекции спина ($j = 5/2$).

Число j называется *спином частицы*, состояния которой изображаются векторами пространства (7.3.6).

§ 7.4. Фермионы и бозоны

Мы видим, что каждая частица в нерелятивистской квантовой механике описывается представлением D_j группы $SU(2)$ в $C(2j+1)$ и бесконечномерным представлением U_{gf} той же группы в пространстве $C(\infty)$ (см. (7.3.7)).

Представление U_{gf} строится одинаковым образом для всех частиц, в то время как степень $2j+1$ представления D_j является характерным признаком данной частицы. Таким образом, число j — спин частицы — является ее индивидуальной характеристикой.

Поскольку представление D_j группы $SU(2)$ получается с помощью тензоров валентности $T(2j+1, 0)$, частице со спином j приписывается *тензорная природа*. Например, при $j=0$ частица называется *скалярной*, при $j=1/2$ — *спинорной*, при любом j — *спинтензорной* валентности $2j+1$.

Частицы с нечетной валентностью (с полуцелым спином) называются *фермионами*, с четной валентностью (целым спином) — *бозонами*.

Паули показал, что фермионы подчиняются статистике Ферми, а бозоны — статистике Бозе (это замечание несущественно для понимания дальнейшего).

§ 7.5. Два состояния или две частицы?

До сих пор мы считали, что одна и та же частица — например, электрон — может находиться в двух спиновых состояниях со спином $+1/2$ или $-1/2$.

Однако электрон без определенного значения спина никогда не наблюдается и представляет собой лишь абстрактное понятие. Ввиду этого вполне закономерна другая точка зрения: можно считать, что существуют *две* элементарные частицы — электрон со спином $+1/2$ и электрон со спином $-1/2$, в то время как «просто электрон» в природе не встречается. При этом можно сохранить понятие об электроне как о некоторой абстрактной частице, энергия которой в магнитном поле всегда расщепляется на два возможных значения. Соответствующие «векторы состояния» электрона являются одновременно собственными векторами оператора спина и, следовательно, могут быть найдены исследованием соответствующего представления группы $SU(2)$.

Как мы увидим, только что указанное понимание спина приводит к важным обобщениям в теории унитарной симметрии.

ЗАРЯДОВЫЕ МУЛЬТИПЛЕТЫ

§ 8.1. Дублет протон — нейтрон

В 1932 г. Чадвик экспериментально обнаружил нейтрон, масса которого ($939,5 \text{ Мэв}$) лишь незначительно отличается от массы протона ($938,3 \text{ Мэв}$). Вскоре после этого Гейзенберг предложил пренебречь этим различием масс и рассматривать протон и нейтрон как два состояния одной и той же частицы — нуклона.

Теория, предложенная Гейзенбергом, формально весьма напоминает теорию спина электрона, построенную Паули. Число состояний здесь снова равно двум, но физической величиной, различным значениям которой соответствуют эти состояния, является уже не спин, а электрический заряд Q . Поскольку заряд должен принимать *целые* значения (0 у нейтрона, 1 у протона), необходимо ввести в теорию Паули некоторое формальное изменение. Будем по-прежнему рассматривать в качестве основного пространства «удвоенное» пространство волновых функций

$$C(2) \otimes C(\infty). \quad (8.1.1)$$

Предположим, что *оператор заряда принадлежит к операторам моментного типа*, т. е. аналогичен орбитальному моменту и спину. Тогда этот оператор, как и в случае спина электрона, следует искать в алгебре Ли группы $SU(2)$ (сам Гейзенберг рассматривал группу $SO(3)$, ср. § 7.2). Подчеркнем, что, поскольку нас интересует представление $SU(2)$ в пространстве $C(2)$, алгебра Ли $ASU(2)$ берется здесь в *фундаментальном* представлении. Операторы моментного типа, связанные с этим представлением,

могут быть заданы матрицами, формально совпадающими с матрицами операторов спина:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad T_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (8.1.2)$$

Мы обозначили эти операторы через T_k (вместо σ_k), потому что пространству (8.1.1) придается теперь новый смысл; его векторы выражают не спиновые состояния частицы, а ее «зарядовые состояния». T_k называются операторами *изотопического спина*, или, короче, *изоспина*.

Далее, следуя Гейзенбергу, мы введем оператор заряда Q с таким расчетом, чтобы его собственные значения были равны 1 и 0:

$$Q = T_3 + \frac{1}{2} \epsilon(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.1.3)$$

Все предыдущие операторы заданы матрицами в некотором ортонормированном базисе $C(2)$; в этом же базисе собственные векторы оператора Q имеют координаты $(1, 0)$, $(0, 1)$, т. е. совпадают с базисными векторами e_1, e_2 :

$$Qe_1 = 1 \cdot e_1, \quad Qe_2 = 0 \cdot e_2. \quad (8.1.4)$$

Возможные значения заряда, «предсказываемые» теорией, суть 1 и 0 — собственные значения Q . Операторы

$$T_+ = T_1 + iT_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_- = T_1 - iT_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.1.5)$$

переводят друг в друга векторы «протонного» и «нейтронного» состояний:

$$T_+e_2 = e_1, \quad T_-e_1 = e_2. \quad (8.1.6)$$

Если записать каждый вектор пространства (8.1.1) с помощью базиса e_1, e_2 в виде

$$e_1 \otimes \psi_1(x, y, z) + e_2 \otimes \psi_2(x, y, z), \quad (8.1.7)$$

то вектор этот можно отождествить с парой (ψ_1, ψ_2) обычных волновых функций (надо иметь в виду, что такое отожд-

действие неоднозначно и зависит от выбора базиса; таким образом, состояние системы в действительности изображается не парой (ψ_1, ψ_2) , а инвариантным объектом — вектором пространства (8.1.1)).

Нормировка вектора (8.1.7) производится на основании определения скалярного произведения в тензорном произведении пространств (2.3.8):

$$\begin{aligned} ((\psi_1, \psi_2) | (\chi_1, \chi_2)) &= (e_1 \otimes \psi_1 + e_2 \otimes \psi_2 | e_1 \otimes \chi_1 + e_2 \otimes \chi_2) = \\ &= (\psi_1 | \chi_1) + (\psi_2 | \chi_2), \end{aligned} \quad (8.1.8)$$

где скалярные произведения справа взяты в гильбертовом пространстве $C(\infty)$. Следовательно, вектор (8.1.7) нормирован тогда и только тогда, когда

$$(\psi_1 | \psi_1) + (\psi_2 | \psi_2) = 1. \quad (8.1.9)$$

При условии нормировки, правила вычисления вероятностей можно задать следующим образом: вероятность найти *протон* в объеме

$$[x, y, z; x + dx, y + dy, z + dz]$$

равна

$$|\psi_1(x, y, z)|^2 dv,$$

вероятность найти *нейтрон* —

$$|\psi_2(x, y, z)|^2 dv,$$

вероятность найти *нуклон* —

$$(|\psi_1(x, y, z)|^2 + |\psi_2(x, y, z)|^2) dv.$$

Как мы видим, теория «протонно-нейтронного дублета», предложенная Гейзенбергом, не особенно содержательна. В ней рассматривается только «кинематика» дублета, т. е. возможные состояния частицы; «динамика», требующая рассмотрения операторов во всем пространстве (8.1.1) (а не только в его первом сомножителе), совершенно отсутствует. Соотношения (8.1.6) дают лишь формальное, символическое описание перехода протона в нейтрон и обратно, не описывая этого процесса динамически. Теория не дает никаких новых предсказаний, и ее можно скорее рассматривать как некоторое упорядочение известных

фактов, касающихся дублета протон — нейтрон; неясно было, почему следовало выбрать именно это упорядочение, а не другое.

Естественно, что идея Гейзенберга не была популярна в физике элементарных частиц, и долго не делалось серьезных усилий в этом направлении. Тем не менее оказалось, что именно эта идея легла в основу теории унитарной симметрии *).

§ 8.2. Триплеты и квадруплеты

Рассмотрим теперь «частицу» с тремя «зарядовыми состояниями». По аналогии с теорией Гейзенберга, Кеммер (1938 г.) описал такую систему с помощью неприводимого представления $SO(3)$ (или, что сводится к тому же, $SU(2)$) в пространстве $C(3)$ [5].

Предположим, что заряды, соответствующие трем состояниям, суть 1, 0, -1 . Тогда можно прямо воспользоваться представлением D_1 (§ 6.5); согласно (6.5.15), (6.5.13) имеем в новых обозначениях операторы

$$\begin{aligned} \tilde{T}_3 = Q &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{T}_+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{T}_- &= \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

Соотношения (6.5.2) дают правила коммутирования:

$$[Q, \tilde{T}_+] = T_+, \quad [Q, \tilde{T}_-] = -T_-, \quad [\tilde{T}_+, \tilde{T}_-] = 2Q.$$

Таким образом могут быть описаны триплет Σ -частиц и триплет π -мезонов, группируемые по признаку близости масс. Аналогично можно рассматривать квадрупле-

*) Мы оставляем здесь, естественно, в стороне влияние той же идеи] на развитие ядерной физики, проявившееся значительно раньше.

ты. В этом случае, как и в случае дублета, надо видоизменить оператор \tilde{T}_3 :

$$Q = \tilde{T}_3 + \frac{1}{2} \epsilon(4) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \epsilon(4) =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (8.2.2)$$

Из представления $D_{3/2}$ легко получаются также матрицы \tilde{T}_+ , \tilde{T}_- :

$$\tilde{T}_+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{T}_- = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.2.3)$$

Таким образом может быть описан квадруплет Δ_8 -частиц с зарядами $-1, 0, 1, 2$. Согласно современным представлениям, могут существовать *зарядовые* (или *изотопические*) мультиплеты с любым числом состояний $2j + 1$; при этом оператор заряда $Q = T_3$ при нечетном $2j + 1$ и $Q = T_3 + \frac{1}{2} \epsilon(2j + 1)$ при четном $2j + 1$, а оператор T_3 получается из неприводимого представления D_j группы $SU(2)$. Однако при $j > \frac{3}{2}$ зарядовые мультиплеты пока экспериментально не обнаружены.

Как и в теории спиновых мультиплетов, можно связать с каждым зарядовым мультиплетом абстрактную частицу, энергия которой расщепляется под действием некоторого гипотетического поля. Пока мы ничего не знаем ни об этом поле, ни об операторе энергии; но можно,

по аналогии с квантовой механикой, предполагать, что собственные векторы оператора энергии совпадают с собственными векторами оператора моментного типа T_3 (и тем самым Q).

Максимальное собственное значение T_3 для зарядового мультиплета называется его *изотопическим спином* T . Число частиц в таком мультиплете равно $2T + 1$.

Как мы увидим ниже, соображения такого рода становятся плодотворными при рассмотрении более обширных семейств элементарных частиц, так называемых супермультиплетов.

КЛАССИФИКАЦИЯ АДРОНОВ С ПОМОЩЬЮ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $SU(3)$

§ 9.1. Мотивировка

Экспериментальные данные. Теория унитарной симметрии, построенная Гелл-Манном и, независимо, Нееманом в 1961 г. и получившая дальнейшее развитие и экспериментальное подтверждение в последующие годы, основана на смелом обобщении элементарной классификации зарядовых мультиплетов, изложенной в главе 8. Мы попытаемся изложить ход идей этих авторов, пользуясь некоторыми формальными упрощениями, введенными позже Окубо.

Среди реакций между элементарными частицами выделяют так называемые сильные взаимодействия, энергия которых на расстоянии 10^{-14} см по порядку равна массе взаимодействующих частиц. Частицы, участвующие в сильных взаимодействиях, называются *адронами*. Теория унитарной симметрии изучает только адроны. Она неприменима к фотону γ и к лептонам (электрон e^- , позитрон e^+ , мюон μ^- , антимюон μ^+ , нейтрино ν_e , антинейтрино $\bar{\nu}_e$, мюонное нейтрино ν_μ , мюонное антинейтрино $\bar{\nu}_\mu$). О фотоне и лептонах поэтому дальше не будет речи. Адронам приписывается *барионное число* B , равное 0, 1 или -1 ; это можно сделать таким образом, чтобы сумма барионных чисел частиц, стоящих в левой и правой частях уравнения реакции, всегда совпадали. Конечно, при этом имеется некоторый произвол: можно, не меняя только что указанных соотношений, переменить знаки всех барионных чисел одновременно. Адроны с ненулевым барионным числом называются *барионами*,

адроны с нулевым барионным числом — *мезонами*. Далее, всем элементарным частицам приписывается (обычный) спин j — целый или полуцелый (см. главу 7); соответственно этому частицы называются бозонами или фермионами. Как показывает эксперимент, все мезоны имеют целый спин, а все барионы — полуцелый.

Известно, что при перемене знаков координат волновые функции частиц либо вовсе не меняются, либо меняют знак; в первом случае частице приписывается четность $+$ (плюс), во втором — четность $-$ (минус) (или $+1$, соответственно -1).

Адроны разбиваются на группы с близкими массами — зарядовые мультиплеты (см. главу 8). Число частиц M в зарядовом мультиплете, содержащем данную частицу, называется ее *мультиплетностью*, а число T , связанное с M уравнением $M = 2T + 1$, ее *изотопическим спином*, или *изоспином*. Каждая частица имеет целочисленный заряд (заряд протона принят за единицу). Удвоенное среднее значение заряда частиц изотопического мультиплета всегда оказывается целым и называется *гиперзарядом* каждой из его частиц; гиперзаряд обозначается через Y . Заряды частиц одного зарядового мультиплета все различны и, таким образом, полностью характеризуют в нем отдельные частицы. Как показывают экспериментальные данные, набор чисел (B, j, Q, Y, T) полностью определяет адрон, т. е. у разных адронов такие наборы отличаются хотя бы одним числом. Для каждой частицы существует *античастица* с теми же значениями j, T и обратными по знаку B, Q, Y ; в некоторых случаях частица и ее античастица совпадают («истинно нейтральная частица»). По соглашению, частицей называют адрон, у которого $B = 1$, а античастицей — адрон, у которого $B = -1$.

Для лучшего обозрения экспериментальных фактов приведем несколько таблиц (таблицы (9.1)—(9.3)). Каждая из этих таблиц изображает известную к 1960 г. группу элементарных частиц с данным значением спина j и данной четностью. В первом столбце такой таблицы стоят принятые в настоящее время обозначения частиц, во втором столбце — массы частиц (в $M_{\text{эв}}$), в третьем — заряды Q , в четвертом — помещается гиперзаряд Y , в пятом — изотопический спин T .

Горизонтальные прямые разделяют зарядовые мультиплеты. В случае, когда массы отдельных частиц мультиплета точнее не известны, указаны средние массы по мультиплету. Четность обозначена плюсом или минусом. Учтены небольшие исправления масс, найденные в более поздних экспериментах.

Таблица 9.1

Фермионы

 $F_{1/2} (j = 1/2, \text{ четность } +)$ $F_{3/2} (j = 3/2, \text{ четность } +)$

Частица	Масса	Q	Y	T
Ξ^-	1320,8	-1	-1	$\frac{1}{2}$
Ξ^0	1314,3	0	-1	$\frac{1}{2}$
Σ^-	1197,1	-1	0	$\frac{1}{2}$
Σ^0	1192,4	0	0	1
Σ^+	1189,4	1	0	$\frac{1}{2}$
Λ	1115,4	0	0	0
N^0	939,5	0	1	$\frac{1}{2}$
N^+	938,3	1	1	$\frac{1}{2}$

Частица	Масса	Q	Y	T
Ξ_{δ}^-	1532	-1	-1	$\frac{1}{2}$
Ξ_{δ}^0		0	-1	$\frac{1}{2}$
Σ_{δ}^-	1385	-1	0	$\frac{1}{2}$
Σ_{δ}^0		0	0	1
Σ_{δ}^+		1	0	$\frac{1}{2}$
Δ_{δ}^-	1238	-1	1	$\frac{3}{2}$
Δ_{δ}^0		0	1	$\frac{3}{2}$
Δ_{δ}^+		1	1	$\frac{3}{2}$
Δ_{δ}^{++}		2	1	$\frac{3}{2}$

В этой таблице N^0 обозначает нейтрон, N^+ — протон.

Две аналогичные таблицы для античастиц получаются заменой знаков Q и Y на обратные.

В таблицах бозонов частицы и античастицы указаны вместе. Античастицы с нулевым зарядом, в отличие от соответствующих частиц, обозначаются тильдой. В таблице «псевдоскалярных мезонов» $\tilde{\kappa}^0$ есть античастица κ^0 , κ^- — античастица κ^+ , π^- — античастица π^+ ; η и π^0 совпадают со своими античастицами («истинно нейтральные частицы»). Античастицы: $\tilde{\kappa}^0$ для κ^0 , κ^- для κ^+ , ρ^- для ρ^+ . Частицы ϕ и ρ^0 совпадают со своими античастицами.

Таблица 9.2

Бозоны

 $B_0 (j=0, \text{ четность } -)$

Частица	Масса	Q	Y	T
η	548,7	0	0	0
κ^-	493,8	-1	-1	$\frac{1}{2}$
$\tilde{\kappa}^0$	498,0	0	-1	$\frac{1}{2}$
κ^0	498,0	0	1	$\frac{1}{2}$
κ^+	493,8	1	1	$\frac{1}{2}$
π^-	139,6	-1	0	
π^0	135,0	0	0	1
π^+	139,6	1	0	

 $B_1 (j=1, \text{ четность } -)$

Частица	Масса	Q	Y	T
κ^{*-}	891	-1	-1	$\frac{1}{2}$
$\tilde{\kappa}^{*0}$		0	-1	$\frac{1}{2}$
κ^{*0}	891	0	1	$\frac{1}{2}$
κ^{*+}		1	1	$\frac{1}{2}$
ϕ	782	0	0	0
ρ^-	763	-1	0	
ρ^0		0	0	1
ρ^+		1	0	

Кроме того, существует еще ω -мезон со спином, также равным 1, совпадающий со своей античастицей; по причинам, которые выяснятся дальше, мы выделим его в отдельную таблицу (из единственного мультиплета, содержащего только ω):

Таблица 9.3

 $B'_1 (j=1, \text{ четность } -)$

	Масса	Q	Y	T
ω	1019	0	0	0

Таким образом, статистика и спин позволяют выделить некоторые группы зарядовых мультиплетов, которые называются *супермультиплетами*.

Основные идеи теории унитарной симметрии. Исходной точкой построения Гелл-Манна и Неемана было стрем-

ление объяснить «октет барионов» $F_{1/2}$, содержащий важнейшие частицы N^+ , N^0 . Объяснение это можно представить себе как осуществление некоторой интуитивной программы, которую мы сейчас попытаемся изложить.

Напомним сначала важный принцип классификации спектральных линий (или, что то же, собственных значений оператора энергии) в квантовой механике.

Пусть оператор энергии H системы инвариантен относительно группы G . Тогда, как мы знаем (§ 6.4), каждое неприводимое представление P^0 группы G определяет некоторое собственное подпространство оператора H , соответствующее вырожденному собственному значению H . Пусть, для простоты, такое собственное подпространство есть *полное* собственное подпространство C_E , т. е. содержит *все* собственные векторы с данным E . Тогда можно доказать, что при любом возмущении оператора H , не нарушающем его симметрии относительно группы G , собственное значение E не расщепляется; это значит, что если взять вместо H «возмущенный» оператор энергии $H + H'$, где H' мал по отношению к H и перестановочен с операторами U_g , то собственному значению E будет соответствовать единственное близкое собственное значение E' оператора $H + H'$, имеющее ту же кратность, что E .

Пусть теперь группа G содержит некоторую подгруппу G_1 (например, полная группа вращений SO_3 содержит подгруппу вращений вокруг заданной оси). Рассмотрим представление P^0 только на подгруппе G_1 , т. е. возьмем лишь те операторы U_g , для которых g принадлежит G_1 . Тогда получается представление P_1 подгруппы G_1 операторами, действующими в том же собственном подпространстве C_E ; это представление может оказаться *приводимым*, так как система представляющих операторов U_g уменьшилась по сравнению с группой $P^0(G)$. Пусть C_E распадается в сумму ортогональных подпространств $C_E^{(1)}, \dots, C_E^{(k)}$, неприводимых относительно представления P_1 .

Произведем теперь возмущение H' оператора H , *симметричное лишь относительно подгруппы G_1* , но не относительно всей группы G . Тогда происходит расщепление собственного значения E по определенному закону: как

можно показать, возникает ровно k собственных значений оператора $H + H'$, близких к E , причем каждое из этих собственных значений E_i ($i = 1, 2, \dots, k$) имеет кратность, равную размерности пространства $C_E^{(i)}$, при надлежащей нумерации. (Мы оставляем здесь в стороне случаи «неполного расщепления», которые могут произойти при специальном выборе возмущающего оператора H' .)

Наконец, при добавочном возмущении H'' , не обладающем какими-либо свойствами симметрии, можно расщепить собственные значения полностью: каждому E_i соответствует столько *простых* собственных значений оператора $H + H' + H''$, какова кратность E_i .

Обратимся теперь к классификации элементарных частиц. Мы видели, что в «теории зарядовых мультиплетов» целое семейство частиц — мультиплет — рассматривается как совокупность состояний одной гипотетической частицы (« N -частицы», « Ξ -частицы», « Σ -частицы» и т. д.).

Сделаем следующий шаг, пока не имеющий никакого обоснования: попытаемся рассматривать все адроны как всевозможные возбужденные состояния некоторой универсальной частицы — «первичного адрона», или же, например, все барионы — как состояния «первичного бариона», а все мезоны — как состояния «первичного мезона».

Подчеркнем, что такое представление выходит за рамки существующих в настоящее время теорий, и неясно даже, закономерна ли вообще такая точка зрения. Однако для лучшего понимания идей теории унитарной симметрии такое предположение полезно, и мы используем его для наглядности изложения.

Тогда можно постулировать существование некоторого оператора H , действующего на «пространстве состояний первичного адрона» и аналогичного оператору энергии в квантовой механике. Собственными векторами такого оператора должны быть состояния отдельных адронов, а собственными значениями — их энергии (массы).

По аналогии с квантовой механикой мы предположим, что «исходному» состоянию частицы соответствует «невозмущенный» оператор H ; это состояние с высоким, по-видимому, бесконечным, вырождением. Пусть теперь оператор H возмущается (мы оставляем пока в стороне во-

прос, каким полем). Пусть при этом, однако, возмущенный оператор остается симметричным относительно некоторой группы G . Смысл последней фразы представляется достаточно загадочным, поскольку неясно, в каком пространстве действуют H и операторы U_g , представляющие группу G ; но мы постулируем, что такое «пространство состояний первичного адрона» существует.

Тогда можно ожидать, что неприводимым представлениям группы G соответствуют собственные подпространства оператора H , на которые распадается «первоначальное» пространство. Векторы такого собственного подпространства C_E в совокупности описывали бы «менее вырожденное состояние» «первичного адрона» или, на обычном языке, некоторое *естественным образом выделенное семейство элементарных частиц*.

Более тонкую классификацию можно получить, подвергая H дальнейшему возмущению H' ; если при этом имеется симметрия $H + H'$ относительно некоторой подгруппы G_1 группы G , то, как мы видели выше, C_E распадается в сумму подпространств $C_E^{(i)}$, каждое из которых должно описывать некоторое *подсемейство элементарных частиц*, входящее в семейство C_E .

Наконец, при дальнейшем возмущении мы получаем оператор энергии $H + H' + H''$, простым собственным значениям которого отвечают взаимно ортогональные собственные векторы, изображающие *состояния адрона с определенным значением энергии (массы)*. Этим векторам соответствуют *обычные элементарные частицы*.

Таким образом, можно наметить некоторые принципы «иерархической» классификации элементарных частиц. Естественно, начинать надо с нижнего конца этой иерархии, т. е. с семейств, распадающихся на отдельные элементарные частицы. Такими давно известными семействами являются *зарядовые мультиплеты*.

Мы знаем, что зарядовые мультиплеты описываются неприводимыми представлениями группы $SO(3)$ или, что ведет к тем же результатам, группы $SU(2)$ (переход к $SU(2)$, при всей его простоте, нетривиален и имеет далеко идущие физические последствия!).

Как было показано в § 5.1, группа $SU(2)$ имеет неприводимые представления P_1 любой степени; фиксируя

степень n представления P_1 , мы получаем n -мерное собственное подпространство $C(n)$ возмущенного оператора энергии, так что $SU(2)$ представляется операторами, действующими в $C(n)$. Возмущенный оператор энергии следует при этом записать, в предыдущих обозначениях, в виде $H + H'$; он перестановочен с представляющими операторами $P_1(U)$ группы $SU(2)$, играющей роль подгруппы G_1 некоторой неизвестной еще группы G . Дальнейшее возмущение энергии приводит к оператору $H + H' + H''$, который уже не перестановочен ни с какой группой операторов.

Предположим, что энергия и заряд частицы одновременно точно измеримы (ср. § 6.3). Тогда оператор энергии $H + H' + H''$ и оператор заряда должны быть перестановочны. Но, как мы видели в главе 8, оператор заряда (с поправкой, зависящей от размерности и кратной единичному оператору) следует искать среди представляющих операторов алгебры Ли группы $SU(2)$. Итак, «полный» оператор энергии перестановочен с одним из операторов алгебры Ли $\tilde{P}_1 ASU(2)$ и, следовательно, имеет с ним общие собственные векторы. Но тогда можно, не зная оператора энергии, найти его собственные векторы как собственные векторы оператора моментного типа $\tilde{P}_1(T_3)$.

Эти собственные векторы, согласно сказанному выше, следует рассматривать как *векторы состояния частиц, образующих некоторый мультиплет.*

Теперь рассмотрим октет барионов $F_{1/2}$. Как мы видели выше, октет $F_{1/2}$ является естественным образом выделенным (с помощью спина и четности) семейством частиц, и столь же естественно октет распадается на мультиплеты (по признаку близкой массы). Октет состоит из одного триплета Σ , двух дублетов Ξ и Λ и синглета Λ . Поставим себе целью описать весь октет с помощью неприводимого представления некоторой группы G , содержащей $SU(2)$ в качестве подгруппы (G_1 в наших предыдущих рассуждениях). Группа G должна быть перестановочна с «невозмущенным» (в действительности менее возмущенным) оператором энергии H , который также неизвестен. Однако естественное разбиение октета на мультиплеты подсказывает предполагаемую «групповую» картину расщепления энергии.

Именно, требуется построить группу Ли G и ее неприводимое представление P^0 , удовлетворяющее следующим условиям:

1) Степень P^0 должна быть равна 8, чтобы пространство представления P^0 разлагалось на одномерные подпространства, соответствующие восьми частицам октета.

2) G должна содержать $SU(2)$ в качестве подгруппы.

3) Представление P_1^0 , индуцируемое P^0 на подгруппе $SU(2)$, должно распадаться на четыре неприводимых представления; эти неприводимые представления $SU(2)$ должны соответствовать зарядовым мультиплетам Σ , Ξ , N , Λ .

Уже первые два условия подсказывают, что в качестве группы G можно выбрать группу $SU(3)$; в самом деле, в таблице неприводимых представлений $SU(3)$ (см. (5.2.19)) содержится представление степени 8 (типа $\text{Sym}^0(1,1)$, см. § 5.2). Далее, $SU(3)$ есть группа всех унитарных унимодулярных операторов в трехмерном комплексном евклидовом пространстве $C(3)$; ясно, что операторы $SU(3)$, переводящие в себя некоторое двумерное подпространство $C(2)$, образуют подгруппу $SU(2)$, изоморфную группе $SU(2)$. Что касается условия 3), то для его проверки понадобится детальное исследование восьмимерного представления группы $SU(3)$. Такое исследование будет проведено ниже. Теперь же мы попытаемся применить другие представления группы $SU(3)$ для описания других известных семейств элементарных частиц, содержащихся в приведенных выше таблицах. Так как мы теперь производим лишь предварительное «опробование» группы $SU(3)$, то ограничимся пока сопоставлением числа частиц в таблицах с возможными степенями неприводимых представлений группы $SU(3)$ (в отличие от представлений $SU(2)$, лишь некоторые специальные числа могут быть степенями таких представлений!).

Первые сопоставления с опытом. Прежде всего, мы обнаруживаем октет бозонов с нулевым спином B_0 (табл. 9.2), который должен соответствовать, по-видимому, неприводимому представлению степени 8, эквивалентному рассмотренному выше. В разложении гипотетического представления $SU(3)$ в «пространстве состояний адрона» на неприводимые представления одно и то же представление

может встретиться несколько раз; поэтому не приходится удивляться, что восьмирядное представление встретилось еще раз. Мультиплетный состав октета B_0 подтверждает наши предположения: B_0 состоит из одного триплета, двух дублетов и одного синглета, как это и должно быть, в силу условия 3), для восьмирядного неприводимого представления (все такие представления эквивалентны).

Далее, имеется еще девять бозонов со спином 1, помещенных в таблице B_1 (таблица 9.2) и в следующей однострочечной таблице (таблица 9.3). Но, как показывает таблица (5.2.19), не существует девятирядного представления $SU(3)$. Присмотревшись к строению таблицы B_1 , мы обнаруживаем в ней, как и в B_0 , один триплет, два дублета и один синглет. Но если условие 3) должно быть выполнено, то *всякий* октет должен иметь именно такой состав. Это наводит на мысль, что бозоны со спином 1 не составляют одного супермультиплета, а распадаются на октет B_1 и одну отдельную частицу, составляющую полный супермультиплет; такое предположение поддерживается существованием *однорядного* неприводимого представления в (5.2.19).

Приходится, таким образом, примириться с тем, что спин и четность дают слишком грубую классификацию, нуждающуюся в дальнейшем уточнении.

Мы оставили пока в стороне фермионы со спином $3/2$ (таблица 9.1), которые готовят нам неприятный сюрприз. Дело в том, что в 1960 г. было известно всего *девять* фермионов со спином $3/2$; при этом мультиплетный состав их лишает нас возможности отщепить от этой девятки *одну* частицу, как мы это сделали выше: девятка состоит из квадруплета, триплета и дублета.

Есть, однако, и другой путь: Гелл-Манн заметил, что *десятирядное* представление $\text{Sym}^0(3,0)$ (5.2.19) распадается в точности на один квадруплет, один триплет, один дублет и один синглет, и предположил, что частица, составляющая синглет и недостающая в таблице $F_{3/2}$, еще не обнаружена (1960 г.)! Более того, Гелл-Манн сумел предсказать заряд и массу недостававшей частицы (см. ниже).

Подтверждение этого предсказания в 1964 г. явилось началом общего признания теории унитарной симметрии

§ 9.2. Алгебра Ли $ASU(3)$

План построения. Чтобы выполнить программу, намеченную в § 9.1, надо прежде всего вложить группу $SU(2)$ в группу $SU(3)$; при этом алгебра Ли группы $SU(2)$, т. е. $ASU(2)$, должна оказаться подалгеброй алгебры Ли группы $SU(3)$. Эта последняя должна иметь ту же размерность, что и группа $SU(3)$, следовательно, должна иметь восемь независимых образующих; мы обозначаем ее через $ASU(3)$ (ср. § 4.6).

Согласно таблице в § 4.6 (стр. 93), $ASU(3)$ состоит из бесследных эрмитовых операторов, действующих в пространстве $C(3)$. Нас интересует, прежде всего, способ, которым подалгебра $ASU(2)$ вкладывается в алгебру $ASU(3)$; поэтому мы начнем с того, что фиксируем расположение подалгебры $ASU(2)$ в алгебре $ASU(3)$. После этого можно будет сослаться на теорему из теории групп Ли (см. § 4.6):

Если \mathbf{A}' — алгебра Ли группы G' и \mathbf{A} — подалгебра \mathbf{A}' , изоморфная алгебре Ли группы G_1 , то G содержит подгруппу, изоморфную G_1 ; эта подгруппа определяется единственным образом. (В общем случае подгруппа G_1 строится лишь в локальном смысле, т. е. может быть построена лишь окрестность единицы такой подгруппы. Но в интересующем нас случае подгруппа $SU(3)$, изоморфная $SU(2)$, может быть построена в целом.)

Благодаря этой теореме достаточно построить в $ASU(3)$ подалгебру, изоморфную $ASU(2)$, и тогда в $SU(3)$ автоматически будет построена подгруппа, изоморфная $SU(2)$.

Чтобы фиксировать расположение подалгебры в $ASU(3)$, мы выразим образующие этой подалгебры через образующие алгебры $ASU(3)$. Для этого, прежде всего, фиксируем некоторый ортонормированный базис в пространстве $C(3)$ и будем записывать все операторы алгебры $ASU(3)$ в этом базисе.

Тогда $ASU(3)$ изображается как алгебра бесследных трехрядных эрмитовых матриц. В (4.5.24) указана простая и с математической стороны очень удобная система образующих Окубо для этой алгебры; в этой системе только A_1^1 , A_2^2 и A_3^3 являются эрмитовыми матрицами и при-

надлежат алгебре Ли $ASU(3)$, другие же образующие — внешние по отношению к алгебре. Образующие матрицы A_k^i , кроме того, зависимы: $A_1^1 + A_2^2 + A_3^3 = 0$, так что в действительности среди них только две независимые эрмитовы образующие. Все эти недостатки, однако, искупаются простыми перестановочными соотношениями (4.5.7). Эти соотношения дают добавочный аргумент в пользу естественности образующих Окубо, так как имеют одинаковый вид для всех групп $SU(n)$, и в случае $SU(2)$ сводятся к перестановочным соотношениям для M_3, M_+, M_- (6.5.2).

Выбор подалгебры $ASU(2)$. Теперь естественно фиксировать расположение подалгебры $ASU(2)$ в алгебре $ASU(3)$, выразив образующие $ASU(2)$ через образующие (4.5.24).

Мы приведем одно из (бесконечно многих) решений этой задачи, устраняя таким, по-видимому произвольным, образом неоднозначность в выборе подалгебры. Следует заметить, однако, что этот произвол лишь кажущийся; при другом выборе подалгебры $ASU(2)$ мы получили бы те же выражения образующих $ASU(2)$ через образующие $ASU(3)$, надлежащим образом изменив базис в $C(3)$.

В этом месте необходимо фиксировать обозначения, чтобы избежать путаницы между операторами, действующими в разных пространствах. Условимся обозначать операторы Окубо алгебры $ASU(2)$ через a_k^i , операторы Окубо алгебры $ASU(3)$ через A_k^i . Далее мы будем рассматривать различные неприводимые представления алгебр $ASU(2)$ и $ASU(3)$; пусть \tilde{P}^0 — неприводимое представление алгебры $ASU(3)$ степени N . Тогда положим

$$\tilde{P}^0(a_k^i) = a_k^i(N), \quad \tilde{P}^0(A_k^i) = A_k^i(N).$$

Операторы a_k^i действуют в пространстве $C(2)$; операторы A_k^i — в пространстве $C(3)$; операторы $a_k^i(N), A_k^i(N)$ — в пространстве $C(N)$. Если нам придется долго заниматься каким-нибудь одним представлением \tilde{P}^0 , мы будем писать в начале рассуждений $A_k^i(N), a_k^i(N)$, а затем опускать (N) .

Возвращаясь теперь к алгебре $ASU(3)$, положим

$$\left. \begin{aligned} a_1^1 &= A_1^1 + \frac{1}{2} A_3^3, \\ a_2^2 &= A_2^2 + \frac{1}{2} A_3^3, \\ a_2^1 &= A_2^1, \\ a_1^2 &= A_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (9.2.1)$$

Короче эти определения можно записать в виде

$$a_j^i = A_j^i - \frac{1}{2} \delta_j^i A_k^k, \quad (9.2.2)$$

где индексы i, j, k принимают только значения 1, 2.

При этом

$$a_{11}^1 + a_2^2 = A_1^1 + A_2^2 + A_3^3 = 0. \quad (9.2.3)$$

Далее, пользуясь перестановочными соотношениями (4.5.7) для A_k^i , находим:

$$\begin{aligned} [a_j^i, a_l^k] &= [A_j^i - \frac{1}{2} \delta_j^i A_r^r, A_l^k - \frac{1}{2} \delta_l^k A_s^s] = [A_j^i, A_l^k] = \\ &= \delta_l^i A_j^k - \delta_j^k A_l^i = \delta_l^i a_j^k - \delta_j^k a_l^i \quad (i, j, k, l, r, s = 1, 2). \end{aligned}$$

Мы видим, что a_j^i удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и двухрядные матрицы Окубо (4.5.15). Известно, однако, что структурные постоянные определяют алгебру Ли с точностью до изоморфизма; следовательно, операторы a_j^i порождают подалгебру $ASU(3)$, изоморфную $ASU(2)$. Слово «порождают» здесь надо понимать в смысле, объясненном в (4.5.18): всякий оператор a из $ASU(2)$ выражается в виде

$$a = \alpha a_1^1 + (\beta + i\gamma) a_2^2 + (\beta - i\gamma) a_1^2 - \alpha a_2^1, \quad (9.2.4)$$

где коэффициенты α, β, γ действительны и однозначно определяются оператором a . Ясно, что формула (9.2.4) задает эрмитовы операторы a . Переход от двухрядных матриц Окубо к независимым эрмитовым образующим алгебры $ASU(2)$ (операторам моментного типа) производится по формулам (6.5.20), в которых мы вводим теперь

другие обозначения для эрмитовых образующих (связанные с изоспином):

$$a_1^+ = -a_2^+ = T_3, \quad a_1^+ = T_+, \quad a_2^+ = T_- \quad (9.2.5)$$

Фиксировав в $ASU(3)$ подалгебру, изоморфную $ASU(2)$, мы тем самым фиксировали в $SU(3)$ подгруппу, изоморфную $SU(2)$. Пространство $C(3)$, где действуют все операторы алгебры $ASU(3)$, содержит двумерное подпространство $C(2)$, имеющее уравнение $x^3 = 0$ (в тех же координатах, в которых записаны операторы A_k^i). Операторы a_k^i переводят векторы $C(2)$ снова в векторы $C(2)$, как легко следует из их матричного изображения ((9.2.1), (4.5.24)). Это наводит на мысль, что подгруппа $SU(2)$, соответствующая подалгебре $ASU(2)$, также оставляет инвариантным подпространство $C(2)$, что и подтверждается, если произвести построение подгруппы Ли по заданной подалгебре с помощью экспоненциального отображения.

Физическое истолкование алгебры $ASU(3)$. Таким образом, программа, намеченная в § 9.1, в значительной степени выполнена: мы вложили группу $SU(2)$ в большую группу $SU(3)$, допускающую восьмирядное неприводимое представление $P^0 = \text{Sym}^0(1,1)$; этому представлению соответствует представление \tilde{P}^0 алгебры Ли $ASU(3)$.

Теперь мы хотим описать октет барионов $F_{1/2}$ с помощью представления \tilde{P}^0 по образцу того, как в главе 8 зарядовые мультиплеты описывались с помощью представлений алгебры $ASU(2)$.

Описание в главе 8 производилось с помощью следующих приемов. Сначала в алгебре Ли $ASU(2)$ выделяется некоторый оператор T_3 (оператор изоспина); затем строится оператор $\tilde{P}^0(T_3)$, где \tilde{P}^0 — неприводимое представление, степень которого равна числу частиц мультиплета n . Полученный оператор $\tilde{T}_3 = \tilde{P}^0(T_3)$ действует в пространстве представления $C(n)$, и его собственные векторы соответствуют частицам, входящим в мультиплет.

После надлежащей поправки, зависящей от n ($1/2\epsilon(n)$ при четном n , 0 при нечетном n), из \tilde{T}_3 получается оператор заряда Q , собственные значения которого целочисленны и равны зарядам частиц мультиплета. Выбор оператора T_3 в алгебре $ASU(2)$ не представлял затруднения; в

самом деле, с точностью до действительного нормирующего множителя все операторы из $ASU(2)$ унитарно эквивалентны, т. е. любые два из них связаны соотношением $B = UAU^{-1}$, где U — некоторый унитарный оператор. С помощью экспоненциального отображения e^{iB} легко показать, что представляющие операторы \tilde{A} , \tilde{B} в любом представлении также унитарно эквивалентны и, следовательно, имеют одинаковые собственные значения; поэтому все операторы из $ASU(2)$ физически равноправны, и остается лишь подобрать для некоторого из них нормирующий множитель.

Алгебра $ASU(3)$ устроена сложнее: она содержит два линейно независимых оператора, перестановочных между собой и, следовательно, одновременно приводимых к диагональному виду; в качестве таких операторов можно взять, например, A_1^1 и A_3^3 . Любой другой оператор из $ASU(3)$ унитарно эквивалентен некоторому бесследному диагональному (в том же фиксированном базисе) оператору, т. е. некоторой линейной комбинации A_1^1 и A_3^3 .

Мы можем поэтому предположить, что интересующий нас аналог оператора T_3 (из которого должен получиться оператор заряда для октета) имеет вид

$$A = \alpha A_1^1 + \beta A_3^3, \quad (9.2.6)$$

где коэффициенты α и β должны быть еще определены. Нас интересуют собственные значения представляющего оператора $\tilde{P}^0(A)$, действующего в пространстве $C(8) = \text{Sym}^0(1,1)$; эти собственные значения должны (возможно, после сдвига, как в случае четных мультиплетов) совпадать с зарядами частиц октета $F_{1/2}$. Итак, прежде всего надо знать оператор $\tilde{P}^0(A)$. Но по определению представления алгебры Ли (4.7.1)

$$\tilde{P}^0(A) = \alpha \tilde{P}^0(A_1^1) + \beta \tilde{P}^0(A_3^3), \quad (9.2.7)$$

и достаточно найти представляющие операторы для A_1^1 , A_3^3 . Если сделанная выше гипотеза правильна, то оператор для октета $F_{1/2}$ должен иметь вид

$$Q(8) = \alpha A_1^1(8) + \beta A_3^3(8) + \gamma \epsilon(8), \quad (9.2.8)$$

где постоянная γ определяет упомянутый выше сдвиг собственных значений.

Наибольшее число перестановочных линейно независимых операторов в алгебре Ли называется ее *рангом*. Ранг алгебры $ASU(3)$ равен двум; поэтому число *основных наблюдаемых* группы $SU(3)$, соответствующих перестановочным операторам $ASU(3)$, также равно двум, и одной из них должен быть, по нашему предположению, заряд. Любые два перестановочных линейно независимых оператора алгебры $ASU(3)$, по определению, составляют *полную систему наблюдаемых* группы $SU(3)$.

§ 9.3. Разложение октета и декуплета на изотопические мультиплеты

Чтобы завершить намеченную в § 9.1 программу, надо разложить на неприводимые представления представление P_1^0 подгруппы $SU(2)$, индуцируемое на этой подгруппе восьмимерным неприводимым представлением группы $SU(3)$. Такое разложение называется *редукцией* восьмимерного представления по подгруппе $SU(2)$.

Имея в виду декуплет барионов, мы произведем здесь же редукцию десятимерного неприводимого представления. Редукция любого представления, требующая несколько большей математической техники, будет произведена позже.

Редукция октета. Представление $\text{Sym}^0(1,1)$, описывающее октет, действует в пространстве всех бесследных тензоров типа $T(1,1)$, обозначаемом также через $\text{Sym}^0(1,1)$. Такие тензоры можно выразить через базисные тензоры

$$\Psi_a^b = e_a \otimes \tilde{e}^b \quad (9.3.1)$$

пространства $C(1,1)$. Чтобы линейная комбинация

$$\gamma_b^a \Psi_a^b \quad (9.3.2)$$

базисных тензоров была бесследной, необходимо и достаточно условие

$$\gamma_c^c = 0, \quad (9.3.3)$$

Подпространства $\text{Sym}^0(1,1)$, инвариантные относительно подгруппы $SU(2)$, можно получить, выделяя бесследные тензоры в таких же подпространствах $C(1,1)$; в самом деле, унитарные операторы $P^0(U)$ переводят бесследные тензоры снова в бесследные.

Так как $\text{Sym}^0(1,1)$ — регулярное представление $SU(3)$, то из (5.3.28) следует:

$$\tilde{A}_b^a \Psi_d^c = \delta_d^a \Psi_b^c - \delta_b^c \Psi_d^a. \quad (9.3.4)$$

(а) Чтобы найти в $C(1,1)$ инвариантные подпространства $SU(2)$, рассмотрим сначала все тензоры вида

$$\Phi = \gamma_{\bar{b}}^{\bar{a}} \Psi_{\bar{a}}^{\bar{b}}, \quad (9.3.5)$$

где надчеркнутые индексы \bar{a}, \bar{b}, \dots здесь и далее пробегают значения 1, 2.

Условимся опускать указание на рассматриваемое представление операторов в тех случаях, когда это не может привести к недоразумению. Так, вместо $\tilde{P}^0(A_j^i)$, $\tilde{P}^0(a_j^i)$ мы будем писать просто A_j^i , a_j^i . Согласно (9.2.2), (9.3.4)

$$a_{\bar{b}}^{\bar{a}} \Psi_{\bar{a}}^{\bar{c}} = \left(A_{\bar{b}}^{\bar{a}} - \frac{1}{2} \delta_{\bar{b}}^{\bar{a}} A_{\bar{k}}^{\bar{k}} \right) \Psi_{\bar{a}}^{\bar{c}} = \delta_{\bar{a}}^{\bar{c}} \Psi_{\bar{b}}^{\bar{a}} - \delta_{\bar{b}}^{\bar{c}} \Psi_{\bar{a}}^{\bar{a}}. \quad (9.3.6)$$

Поскольку правая часть снова имеет вид (9.3.5), тензоры (9.3.5) образуют инвариантное подпространство подгруппы $SU(2)$. Чтобы выделить из них бесследные тензоры, надо наложить условие

$$\gamma_{\bar{c}}^{\bar{c}} = 0 \quad (9.3.7)$$

(см. (9.3.3)). Поэтому в качестве базиса подпространства бесследных тензоров (9.3.5) можно взять

$$\Phi_{\bar{b}}^{\bar{a}} = \Psi_{\bar{b}}^{\bar{a}} - \frac{1}{2} \delta_{\bar{b}}^{\bar{a}} \Psi_{\bar{k}}^{\bar{k}}. \quad (9.3.8)$$

Теперь соотношение (9.3.6) приводит к формуле

$$a_{\bar{b}}^{\bar{a}} \Phi_{\bar{a}}^{\bar{c}} = \delta_{\bar{a}}^{\bar{c}} \Phi_{\bar{b}}^{\bar{a}} - \delta_{\bar{b}}^{\bar{c}} \Phi_{\bar{a}}^{\bar{a}}. \quad (9.3.9)$$

Тем самым (см. (5.3.28)) тензоры $\Phi_{\bar{b}}^{\bar{a}}$ порождают пространство *регулярного* (и, следовательно, неприводимого) представления подгруппы $SU(2)$.

Легко видеть, что между тензорами $\Phi_{\bar{b}}^{\bar{a}}$ существует единственное линейное соотношение

$$\Phi_{\bar{c}}^{\bar{c}} = 0. \quad (9.3.10)$$

Как легко проверить,

$$\Phi_2^1, \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1^1 - \Phi_2^2), -\Phi_1^2 \quad (9.3.11)$$

образуют ортонормированный базис Φ , причем, как легко показать с помощью (9.3.9),

$$a_1^1 \Phi_2^1 = -\Phi_2^1, \quad a_1^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1^1 - \Phi_2^2) \right) = 0, \quad a_1^1(-\Phi_1^2) = -\Phi_1^2, \quad (9.3.12)$$

$$a_2^1 \Phi_2^1 = 0, \quad a_1^2 \Phi_2^1 = \Phi_1^1 - \Phi_2^2, \\ a_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1^1 - \Phi_2^2) \right) = -\sqrt{2} \Phi_1^2, \quad a_1^2(-\Phi_1^2) = 0. \quad (9.3.13)$$

Таким образом, представление подгруппы $SU(2)$ в пространстве Φ эквивалентно представлению, определяющему *зарядовый триплет* (ср. (9.2.5), (8.2.1)).

Выразим еще тензоры (9.3.11) через базис:

$$\Psi_2^1, \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1^1 - \Psi_2^2), -\Psi_1^2. \quad (9.3.14)$$

(b) Другие два инвариантных подпространства Φ_* , Φ^* подгруппы $SU(2)$ порождают, соответственно, бесследные тензоры

$$\Psi_{\bar{a}}^{\bar{a}}, \Psi_{\bar{3}}^{\bar{a}}. \quad (9.3.15)$$

В самом деле,

$$a_{\bar{b}}^{\bar{a}} \Psi_{\bar{c}}^{\bar{a}} = \delta_{\bar{c}}^{\bar{a}} \Psi_{\bar{b}}^{\bar{a}}, \quad (9.3.16)$$

и аналогично проверяется инвариантность второго подпространства. В этих подпространствах Φ_* , Φ^* ортонор

мированные базисы составляют, соответственно,

$$\Phi_{*1} = \Psi_2^3, \quad \Phi_{*2} = \Psi_1^3, \quad (9.3.17)$$

$$\Phi_1^* = \Psi_3^1, \quad \Phi_2^* = -\Psi_3^2. \quad (9.3.18)$$

Легко проверить соотношения

$$\left. \begin{aligned} a_2^1 \Phi_{*1} &= 0, & a_1^2 \Phi_{*1} &= \Phi_{*2}, & a_1^2 \Phi_{*2} &= 0, \\ a_2^1 \Phi_1^* &= 0, & a_1^2 \Phi_1^* &= \Phi_2^*, & a_1^2 \Phi_2^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.19)$$

Так как, кроме того, в силу (9.3.4)

$$\left. \begin{aligned} a_1^1 \Phi_{*1} &= -\frac{1}{2} \Phi_{*1}, & a_1^1 \Phi_{*2} &= \frac{1}{2} \Phi_{*2}, \\ a_1^1 \Phi_1^* &= -\frac{1}{2} \Phi_1^*, & a_1^1 \Phi_2^* &= \frac{1}{2} \Phi_2^*, \end{aligned} \right\} \quad (9.3.20)$$

то в пространствах Φ_* , Φ^* индуцируются представления $SU(2)$, эквивалентные фундаментальному (ср. (5.3.27) *). Эти представления тем самым эквивалентны представлению, определяющему зарядовый дублет (см. (8.1.2), (8.1.5)).

(с) Наконец, для тензора Ψ_3^3

$$a_{\bar{b}}^{\bar{a}} \Psi_3^3 = 0. \quad (9.3.21)$$

Следовательно, тензор Ψ_3^3 порождает одномерное инвариантное подпространство $SU(2)$ (очевидно, неприводимое).

Однако тензор (9.3.21) не бесследен и не принадлежит поэтому пространству неприводимого представления $\text{Sym}^0(1,1)$. Надо построить бесследный тензор, так же, как и Ψ_3^3 , ортогональный всем построенным выше инвариантным подпространствам, т. е. тензорам (9.3.14), (9.3.17), (9.3.18). Для этого достаточно из Ψ_3^3 вычесть $\frac{1}{2}(\Psi_1^1 + \Psi_2^2)$.

Нормировка приводит теперь к тензору

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\Psi_3^3 - \Psi_1^1 - \Psi_2^2). \quad (9.3.22)$$

*) Здесь принят обратный порядок нумерации базисных векторов, по сравнению с (5.3.27): векторы нумеруются в порядке возрастания изоспина T_3 . Нумерация же, принятая в главе 5, более удобна для вычислений.

Легко проверить, что

$$a_{\bar{b}}^{\bar{a}} \Phi_0 = 0 \quad (\bar{a}, \bar{b} = 1, 2), \quad (9.3.23)$$

так что Φ_0 порождает одномерное инвариантное подпространство группы $SU(2)$, которое мы обозначим также через Φ_0 . В главе 8 нет аналогичного зарядового мультиплетта, но мы будем говорить, что это пространство соответствует *зарядовому синглету*.

(d) Сумма размерностей подпространств $\Phi, \Phi_*, \Phi^*, \Phi_0$ есть $3 + 2 + 2 + 1 = 8$; они ортогональны друг другу, как видно из сопоставления базисов (9.3.14), (9.3.17), (9.3.18), (9.3.22). Следовательно, разложение

$$\text{Sym}^0(1,1) = \Phi \oplus \Phi_* \oplus \Phi^* \oplus \Phi_0 \quad (9.3.24)$$

приводит к искомой редукции.

По формуле (9.3.6) нетрудно найти собственные значения операторов A_1^1, A_3^3 , принадлежащие построенным базисным векторам.

Сопоставим полученные для октета результаты в виде таблицы:

Базисный вектор	С. зн. A_1^1	С. зн. A_3^3
$\Phi_1^* = \Psi_3^1$	-1	1
$\Phi_2^* = -\Psi_3^2$	0	1
$\Phi_2^1 = \Psi_2^1$	-1	0
$\Phi_m = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1^1 - \Psi_2^2)$	0	0
$-\Phi_1^2 = -\Psi_1^2$	1	0
$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\Psi_3^3 - \Psi_1^1 - \Psi_2^2)$	0	0
$\Phi_{*1} = \Psi_2^3$	0	-1
$\Phi_{*2} = \Psi_1^3$	1	-1

(9.3.25)

Порядок расположения подпространств в этой таблице никак не связан с предыдущим изложением, а выбран

для более удобного сравнения ее с октетом барионов, расположенных в порядке убывания масс. Знаки базисных векторов выбраны таким образом, чтобы операторы A_1^2 , A_2^1 переводили их друг в друга с положительными коэффициентами.

Редукция декуплета. Рассмотрим теперь десятимерное представление $\text{Sym}^0(3,0)$ в пространстве тензоров типа $T(3,0)$. Базис пространства $C(3,0)$ составляют тензоры

$$\Psi_{abc} = e_a \otimes e_b \otimes e_c. \quad (9.3.26)$$

$\text{Sym}^0(3,0)$ ($= \text{Sym}(3,0)$) состоит из тех их линейных комбинаций, которые являются симметричными тензорами.

Мы хотим найти подпространства $\text{Sym}(3,0)$, инвариантные относительно подгруппы $SU(2)$. Для этого мы найдем сначала подпространства $C(3,0)$, обладающие тем же свойством, а затем применим к их тензорам симметризацию \mathbf{S} (см. (3.6.18)). Так как, в силу (5.1.11), для всех операторов $\bar{U} = P^0(U)$, представляющих $SU(3)$,

$$\bar{U} \mathbf{S} = \mathbf{S} \bar{U}, \quad (9.3.27)$$

то мы получим инвариантные подпространства $\text{Sym}(3,0)$.

Для записи *нормированных* базисных тензоров удобно ввести следующее обозначение:

$$\text{Sym} \Psi_{abc} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}} (\Psi_{abc} + \Psi_{bca} + \Psi_{cab} + \Psi_{acb} + \Psi_{cba} + \Psi_{bac}) & (a, b, c \text{ различны}), \\ \frac{1}{\sqrt{3}} (\Psi_{aac} + \Psi_{aca} + \Psi_{caa}) & (a = b \neq c), \\ \Psi_{aaa} & (a = b = c). \end{cases} \quad (9.3.28)$$

(а) Рассмотрим сначала подпространство $\Phi^{(4)}$, порожденное *всеми* тензорами

$$\Psi_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = e_{\bar{a}}^- \otimes e_{\bar{b}}^- \otimes e_{\bar{c}}^- \quad (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = 1, 2). \quad (9.3.29)$$

С помощью (9.2.2), (5.3.24), (5.3.26) легко показать, что

$$a_{\bar{b}}^{\bar{a}} \Psi_{\bar{c}\bar{d}\bar{e}} = \delta_{\bar{c}}^{\bar{a}} \Psi_{\bar{b}\bar{d}\bar{e}} + \delta_{\bar{d}}^{\bar{a}} \Psi_{\bar{c}\bar{b}\bar{e}} + \delta_{\bar{e}}^{\bar{a}} \Psi_{\bar{c}\bar{d}\bar{b}} \quad (\bar{a} \neq \bar{b}), \quad (9.3.30)$$

$$a_{\bar{a}}^{\bar{a}} \Psi_{\bar{c}\bar{d}\bar{e}} = \left[n(\bar{a}) - \frac{3}{2} \right] \Psi_{\bar{c}\bar{d}\bar{e}} \quad (\text{н. с.}),$$

где $n(\bar{a})$ — число индексов $\bar{c}, \bar{d}, \bar{e}$, равных \bar{a} . В силу (5.3.24), (5.3.26), на $\Phi^{(4)}$ определено представление группы $SU(2)$ типа $T(3,0)$ (схема Юнга $\square\square\square$). Симметризация тензоров $\Phi^{(4)}$ приводит к инвариантному подпространству $\Phi_8^{(4)}$.

Базис в $\Phi_8^{(4)}$ составляют тензоры

$$\Psi_{222}, \text{Sym } \Psi_{122}, \text{Sym } \Psi_{112}, \Psi_{111}. \quad (9.3.31)$$

С помощью (9.3.30) легко проверить, что соответствующие собственные значения a_1^1 равны

$$-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \quad (9.3.32)$$

причем

$$\begin{aligned} a_2^1 \Psi_{222} &= 0, \quad a_1^2 \Psi_{222} = \sqrt{3} \text{Sym } \Psi_{122}, \\ a_1^2 \text{Sym } \Psi_{122} &= 2 \text{Sym } \Psi_{112}, \quad a_1^2 \text{Sym } \Psi_{112} = \sqrt{3} \Psi_{111}, \quad a_1^2 \Psi_{111} = 0. \end{aligned} \quad (9.3.33)$$

Пространство $\Phi_8^{(4)}$ соответствует, таким образом, *зарядовому квартуплету* (ср. (8.2.3)).

(b) Далее, тензоры

$$\Psi_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} \quad (\bar{a}, \bar{b} = 1, 2) \quad (9.3.34)$$

порождают инвариантное подпространство $\Phi^{(2)}$ группы $SU(2)$, как видно из формул

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} \Psi_{\bar{c}\bar{d}\bar{e}} &= \delta_{\bar{c}}^{\bar{a}} \Psi_{\bar{b}\bar{d}\bar{e}} + \delta_{\bar{d}}^{\bar{a}} \Psi_{\bar{c}\bar{e}\bar{b}} \quad (\bar{a} \neq \bar{b}), \\ \bar{a} \Psi_{\bar{c}\bar{d}\bar{e}} &= [n(\bar{a}) - 1] \Psi_{\bar{c}\bar{d}\bar{e}} \quad (\text{н.с.}). \end{aligned} \right\} \quad (9.3.35)$$

Тем самым мы получили представление $SU(2)$ типа $T(2,0)$. Симметризация тензоров $\Phi^{(3)}$ приводит к пространству $\Phi_8^{(3)}$. Базис $\Phi_8^{(3)}$ составляют тензоры

$$\text{Sym } \Psi_{223}, \text{Sym } \Psi_{123}, \text{Sym } \Psi_{113}, \quad (9.3.36)$$

принадлежащие собственным значениям

$$-1, 0, 1 \quad (9.3.37)$$

оператора a_1^1 ; при этом

$$\begin{aligned} a_2^1 \text{Sym } \Psi_{223} &= 0, a_1^2 \text{Sym } \Psi_{223} = \sqrt{2} \text{Sym } \Psi_{123}, \\ a_1^2 \text{Sym } \Psi_{123} &= \sqrt{2} \text{Sym } \Psi_{113}, a_1^2 \text{Sym } \Psi_{113} = 0 \end{aligned} \quad (9.3.38)$$

(представление *зарядового триплета*).

(с) Следующее инвариантное подпространство $SU(2)$ порождают тензоры

$$\text{Sym } \Psi_{\bar{a}33} \quad (\bar{a} = 1, 2). \quad (9.3.39)$$

Базис этого подпространства $\Phi_{\bar{a}}^{(2)}$ состоит из тензоров

$$\text{Sym } \Psi_{233}, \text{Sym } \Psi_{133}, \quad (9.3.40)$$

принадлежащих собственным значениям

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \quad (9.3.41)$$

оператора a_1^1 ; при этом

$$\begin{aligned} a_2^1 \text{Sym } \Psi_{233} &= 0, \\ a_1^2 \text{Sym } \Psi_{233} &= \text{Sym } \Psi_{133}, a_1^2 \text{Sym } \Psi_{133} = 0 \end{aligned} \quad (9.3.42)$$

(представление *зарядового дублета*).

(d) Наконец, инвариантно также подпространство $\Phi_{\bar{a}}^{(1)}$, порожденное тензором

$$\Psi_{333} \quad (9.3.43)$$

(«зарядовый синглет»).

(е) Так как сумма размерностей $4 + 3 + 2 + 1 = 10$, мы получаем искомую редукцию:

$$\text{Sym}^0(3, 0) = \Phi_{\bar{a}}^{(1)} \oplus \Phi_{\bar{a}}^{(2)} \oplus \Phi_{\bar{a}}^{(3)} \oplus \Phi_{\bar{a}}^{(4)}. \quad (9.3.44)$$

По формуле (5.3.26) находятся собственные значения

A_1^1 , A_3^3 , принадлежащие базисным векторам. Сопоставим полученные для декуплета результаты в виде таблицы:

Базисный вектор	С. зн. A_1^1	С. зн. A_3^3
Ψ_{333}	-1	2
$\text{Sym } \Psi_{233}$	-1	1
$\text{Sym } \Psi_{133}$	0	1
$\text{Sym } \Psi_{213}$	-1	0
$\text{Sym } \Psi_{123}$	0	0
$\text{Sym } \Psi_{113}$	1	0
Ψ_{222}	-1	-1
$\text{Sym } \Psi_{122}$	0	-1
$\text{Sym } \Psi_{112}$	1	-1
Ψ_{111}	2	-1

(9.3.45)

§ 9.4. Эмпирический вывод операторов заряда, гиперзаряда и изоспина

Вернемся теперь к физическим соображениям § 9.2.

Мы ищем оператор заряда для октета в виде (9.2.8); это значит, что при надлежащем выборе постоянных α , β , γ собственные значения оператора Q (8), действующего на пространстве представления $\text{Sym}^0(1,1)$, должны совпадать с зарядами частиц октета.

Сравнивая таблицу (9.3.25) с таблицей октета барионов (§ 9.1), мы видим, что собственные значения оператора A_1^1 (8) в точности совпадают с зарядами частиц октета. Следовательно, надо положить в (9.2.8) $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$.

Собственные векторы оператора Q (т. е. базисные векторы в пространстве $\text{Sym}^0(1,1)$, построенные в § 9.3) можно, следуя идеям § 9.1, интерпретировать как *векторы состояния супермультиплета $F_{1/2}$* , аналогичные векторам состояния в квантовой механике. Естественно предположить, что эти векторы состояния соответствуют частицам, входящим в октет $F_{1/2}$, причем собственные значения Q (8) равны зарядам частиц.

Поскольку при этом неприводимым составляющим представления $\text{Sym}^0(1,1)$ соответствуют мультиплеты, вы-

деленные в таблице $F_{1/2}$ по экспериментальному признаку — близости масс, то программа описания октета барионов, намеченная в § 9.1, оказывается полностью выполненной.

Итак, оператор заряда для октета принимает вид

$$Q(8) = A_1^1(8). \quad (9.4.1)$$

Замечая, далее, что собственные значения оператора $A_3^3(8)$ в таблице (9.3.25) совпадают со значениями гиперзаряда Y для соответствующих частиц октета $F_{1/2}$, взятого с обратным знаком, мы можем истолковать $-A_3^3(8)$ как оператор гиперзаряда для октета $F_{1/2}$:

$$Y(8) = -A_3^3(8). \quad (9.4.2)$$

Напомним, что гиперзаряд, по самому его определению, один и тот же для частиц мультиплета. Наконец, оператор $T_3(8) = A_1^1(8) + \frac{1}{2}A_3^3(8)$, как легко видеть, имеет для собственных векторов мультиплетов максимальные собственные значения T , равные, соответственно, $\frac{1}{2}$, $1, 0, \frac{1}{2}$. Тем самым для мультиплетов получилось значение изоспина.

Сравнение с таблицей октета $F_{1/2}$ (§ 9.1) показывает, что $T_3(8)$ можно интерпретировать как оператор проекции изоспина для октета $F_{1/2}$:

$$T_3(8) = Q(8) - \frac{1}{2}Y(8). \quad (9.4.3)$$

Термин «проекция изоспина» и обозначение T_3 не кажутся нам особенно удачными, но, во всяком случае, напоминают о связи этого оператора со «спиновой алгеброй».

Мы рассмотрели представляющие операторы для представления $\text{Sym}^0(1, 1)$ степени 8; попытаемся теперь применить тот же метод к представлению $\text{Sym}^0(3, 0)$ степени 10 (5.2.19). В этом случае получается таблица редукции (9.3.45), которая, за исключением первой горизонтали, дает те же значения зарядов и гиперзарядов частиц, что и таблица $F_{3/2}$ в § 9.1, изображающая семейство известных к 1960 г. барионов со спином $3/2$. Это навело Гелл-Манна на мысль, что существует еще одна, неизвестная, частица со спином $3/2$, образующая вместе с известными девятью

частицами *декуплет барионов*. Гелл-Манн предсказал, опираясь на таблицу (9.3.45) представления $\text{Sym}^0(3,0)$, что эта частица должна иметь заряд -1 , гиперзаряд -2 (обратный по знаку собственному значению $A_3^3(10)$) и, следовательно, изоспин 0. Более того, Гелл-Манн сумел даже указать предполагаемую массу этой частицы, которую он обозначил через Ω^- . Именно, он заметил, что массы частиц мультиплетов, входящих в таблицу $F_{3/2}$, отстоят приблизительно на равные расстояния друг от друга (причина этого замечательного явления была позже установлена Гелл-Манном и Окубо, см. главу 17). Экстраполируя это соотношение на частицу Ω^- , Гелл-Манн предсказал ее массу (≈ 1680).

В 1964 г. частица с предсказанными свойствами была обнаружена.

Как было указано в § 9.1, существуют октет античастиц $\tilde{F}_{1/2}$ со спином $1/2$, получающийся из $F_{1/2}$ переменной знаков Y и Q одновременно, и декуплет античастиц $\tilde{F}_{3/2}$, получающийся таким же образом из $F_{3/2}$. Очевидно, для античастиц мы должны интерпретировать операторы заряда и гиперзаряда иначе, чем для частиц: $Q(N) = -A_1^1(N)$, $Y(N) = A_3^3(N)$.

Переходя теперь к мезонам, мы получаем при $N=8$ октеты B_0 (со спином 0) и B_1 (со спином 1). Для мезонов обе указанные выше интерпретации операторов Q, Y дают одинаковые супермультиплеты, каждый из которых содержит как частицы, так и античастицы.

Выделенный в § 9.1 супермультиплет, состоящий из единственной частицы, также находит объяснение: он соответствует скалярному представлению $\text{Sym}^0(0,0)$, $N=1$. Теперь понятно, почему мы выделили эту частицу из числа мезонов с тем же спином: каждый супермультиплет, соответствующий некоторому неприводимому представлению группы $SU(3)$, состоит из частиц с одинаковым спином, но могут быть супермультиплеты с одним и тем же спином, соответствующие разным представлениям. Таким образом, примененный в § 9.1 принцип соединения частиц в группы по равенству спина оказывается слишком грубым и заменяется классификацией с помощью представлений $SU(3)$.

§ 9.5. Принципы $SU(3)$ -описания элементарных частиц

Априорные ограничения теории. Прежде всего следует заметить, что $SU(3)$ -теория не дает ни полной, ни исчерпывающей классификации элементарных частиц. Как уже было сказано выше, лептоны и фотон этой классификацией не охватываются.

I. $SU(3)$ -теория описывает все адроны, и только адроны.

Далее, такие важные характеристики частиц, как спин, барионное число, четность не вытекают из $SU(3)$ -теории, хотя и связаны с ней некоторым «внешним» образом.

II. Адроны классифицируются в $SU(3)$ -теории на супермультиплеты, каждый из которых состоит из частиц с одним и тем же барионным числом, одним и тем же спином и одной и той же четностью. В частности, каждый супермультиплет состоит либо только из барионов, либо только из мезонов; в первом случае в него входят либо только частицы, либо только античастицы, во втором — могут входить и те и другие.

Правило построения супермультиплетов. Оно позволяет получить все физически возможные супермультиплеты.

III. Каждый супермультиплет соответствует некоторому неприводимому представлению группы $SU(3)$, причем число входящих в супермультиплет частиц равно степени представления.

Отсюда следует, что число частиц в супермультиплетах не может быть произвольным: оно равно одному из чисел 1, 3, 6, 8, 10, 15, 21, 24, 27, 28, 35, ..., указанных в таблице (5.2.19). Но это не значит, что *каждому* неприводимому представлению соответствует существующий в природе супермультиплет. Какие представления физически осуществимы, пока строго не установлено; но можно указать условия типа «запрета», позволяющие отбросить некоторые представления, осуществимость которых считается в настоящее время сомнительной. Это будет сделано ниже с помощью операторов заряда и гиперзаряда.

Правила построения операторов для супермультиплета. Эти правила непосредственно подсказываются рассмотренными выше примерами.

IV. Каждому супермультиплету соответствует пространство состояний — пространство $\text{Sym}^0(p, q)$ неприводимого представления, описывающего этот супермультиплет. Каждый вектор этого пространства истолковывается как состояние супермультиплета.

V. На пространстве состояний $\text{Sym}^0(p, q)$ каждого супермультиплета определяются операторы заряда и гиперзаряда $Q(N)$, $Y(N)$, где $N = N(p, q)$ — степень представления. Для построения этих операторов поступают следующим образом. Берут в алгебре Ли группы $SU(3)$ операторы Окубо A_1^1, A_3^3 и строят для них представляющие операторы $A_1^1(N), A_3^3(N)$ при помощи представления $\text{Sym}^0(p, q)$. Тогда операторы $Q(N), Y(N)$ задаются следующим предписанием:

$$Q(N) = \begin{cases} A_1^1(N) & \text{для частиц-барионов } (B = 1), \\ -A_1^1(N) & \text{для античастиц-барионов } (B = -1), \\ \pm A_1^1(N) & \text{для мезонов } (B = 0); \end{cases} \quad (9.5.1)$$

$$Y(N) = \begin{cases} -A_3^3(N) & \text{для частиц-барионов } (B = 1), \\ A_3^3(N) & \text{для античастиц-барионов } (B = -1), \\ \mp A_3^3(N) & \text{для мезонов } (B = 0). \end{cases} \quad (9.5.2)$$

Знаки в формулах (9.5.1) и (9.5.2) можно брать в двух комбинациях (+ —, — +), приводящих к одному результату для синглета и октета. Другие супермультиплеты мезонов до сих пор не обнаружены. Заметим, что синглет и октет суть единственные супермультиплеты, для всех частиц которых $|Q| \leq 1$, $|Y| \leq 1$.

Принцип запрета. Следующее правило требует, чтобы все собственные значения операторов $Q(N), Y(N)$ были целочисленными. Эти собственные значения должны быть равны зарядам и гиперзарядам частиц супермультиплета, а у всех известных частиц заряды и гиперзаряды — целые числа.

VI. Супермультиплеты соответствуют лишь тем неприводимым представлениям группы $SU(3)$, для которых все собственные значения $Q(N), Y(N)$ целочисленны.

Это и есть «принцип запрета» для представлений, о котором говорилось выше.

Правило разложения супермультиплетов на мультиплеты.

VII. Мультиплеты, составляющие данный супермультиплет, строятся следующим образом. Неприводимое представление $\text{Sym}^0(p, q)$, задающее супермультиплет, индуцирует на подгруппе $SU(2)$ группы $SU(3)$ представление этой подгруппы в пространстве состояний супермультиплетов; это представление, вообще говоря, приводимое, разлагается на неприводимые представления.

Неприводимые пространства этих представлений являются одновременно собственными подпространствами S_T оператора $Y(N)$. Они взаимно однозначно соответствуют изотопическим мультиплетам, составляющим данный супермультиплет, причем размерность S_T равна числу частиц мультиплетов, а собственное значение есть значение гиперзаряда всех этих частиц.

Определение понятия элементарной частицы в $SU(3)$ -теории.

VIII. Пространства изотопических мультиплетов S_T инвариантны относительно операторов изотопического спина $T_{\pm}^2(N)$. В каждом таком пространстве существует однозначно определенный (с точностью до фазового множителя $e^{i\varphi}$) базис e_1, \dots, e_k из собственных векторов оператора $Q(N)$ такой, что

$$T_- e_1 = 0, \quad T_+ e_1 = \lambda_2 e_2, \dots, \quad T_+ e_{k-1} = \lambda_k e_k, \quad T_+ e_k = 0 \quad (9.5.3)$$

$$(T_- = a_2^1(N), \quad T_+ = a_1^2(N), \quad \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_k > 0).$$

Этим векторам взаимно однозначно соответствуют элементарные частицы, входящие в изотопический мультиплет.

Число $T = \frac{k-1}{2}$ (целое или полуцелое) называется изоспином мультиплетов, а также каждой из его частиц.

§ 9.6. Три типа изоспина

Изложенная выше классификация адронов основана не только на выборе группы $SU(3)$, неприводимые представления которой определяют супермультиплеты, но также на выборе некоторой подгруппы $SU(3)$, изоморфной

$SU(2)$. В самом деле, при помощи этой подгруппы строится соответствующая подалгебра Ли $ASU(2)$, образующие которой — операторы изоспина a_k^i — служат для разбиения супермультиплетов на мультиплеты.

Напомним основные этапы этого построения, чтобы выяснить, каков содержащийся в них элемент произвола.

Прежде всего, группа $SU(3)$ рассматривается как группа операторов, действующих в трехмерном комплексном евклидовом пространстве $C(3)$. Чтобы описать действие этих операторов, в $C(3)$ фиксируется базис e_1, e_2, e_3 . С помощью этого базиса для алгебры Ли $ASU(3)$ группы $SU(3)$ выбирается (внешняя) система образующих Окубо A_k^i . Диагональные операторы A_k^k имеют при этом физический смысл: A_1^1 есть оператор заряда Q , $-A_3^3$ — оператор гиперзаряда Y . Что касается A_2^2 , то он равен $-A_1^1 - A_3^3$ и самостоятельного значения не имеет; впрочем, можно было бы фиксировать другую пару диагональных операторов, введя в качестве новой наблюдаемой $Y - Q$. Базисные векторы являются собственными векторами диагональных операторов Окубо.

Операторы Окубо не связаны с выбранным базисом, в котором они задаются; матричные элементы этих операторов в любом базисе задаются одинаково.

Отсюда видно, что выбор базиса e_1, e_2, e_3 в описанных только что построениях не играет существенной роли.

Описанная выше часть $SU(3)$ -теории позволяет найти супермультиплеты: именно, неприводимые представления группы дают перечень возможных супермультиплетов, а операторы $Q = A_1^1$ и $Y = -A_3^3$ определяют, в качестве их собственных значений, значения заряда и гиперзаряда для частиц каждого супермультиплета.

Для дальнейшего развития теории — описания входящих в каждый супермультиплет мультиплетов — надо фиксировать в $SU(3)$ подгруппу, изоморфную $SU(2)$. Эту подгруппу надо выбрать таким образом, чтобы один из двух перестановочных между собой эрмитовых операторов алгебры $ASU(3)$, принадлежал соответствующей подалгебре Ли $ASU(2)$, а другой был перестановочен с этой подалгеброй; тогда из двух наблюдаемых, связанных с

алгеброй $ASU(3)$, одна будет сохранять постоянное значение на подпространствах мультиплетов, а другая будет принимать разные значения на собственных векторах каждого мультиплета. Поскольку с математической стороны операторы равноправны, можно было бы выбрать в качестве таких двух наблюдаемых любые независимые линейные комбинации заряда и гиперзаряда. Однако наиболее естественно характеризовать элементарные частицы непосредственно их зарядом и гиперзарядом, поскольку эти понятия исторически сложились до появления теории унитарной симметрии.

С точки зрения традиционного описания элементарных частиц операторы A_1^1 и A_3^3 оказываются, следовательно, в преимущественном положении по сравнению с A_2^2 .

Теперь надо решить, какая из наблюдаемых A_1^1 , A_3^3 должна сохранять постоянное значение на каждом мультиплете. Каждое из этих двух соглашений означает выбор подалгебры $ASU(2)$ или, что то же, подгруппы $SU(2)$ и приводит — с помощью одной и той же математической техники — к некоторому разбиению супермультиплета на мультиплеты. Напомним, что это разбиение получается следующим образом. Неприводимое представление, соответствующее супермультиплету, рассматривается на подгруппе, изоморфной $SU(2)$, так что получается представление этой подгруппы в пространстве супермультиплета, вообще говоря, приводимое. Разложение этого представления на неприводимые представления задает разложение пространства супермультиплета в ортогональную сумму подпространств, размерность каждого из которых равна числу частиц в соответствующем мультиплете.

Надлежащий оператор из алгебры Ли выбранной подгруппы позволяет выделить в качестве его собственных векторов состояния, соответствующие частицам мультиплета.

Подпространства в ортогональном разложении и векторы состояний в этих подпространствах, конечно, зависят от выбора подгруппы в $SU(3)$ и оператора проекции изоспина; при этом неприводимое представление $SU(3)$, индуцирующее приводимое представление на подгруппе, считается для данного супермультиплета фиксированным, не зависящим от выбора подгруппы.

Если в качестве наблюдаемой, постоянной на каждом мультиплете, взять A_3^3 , то каждый мультиплет будет состоять из частиц с близкими массами (ср. таблицы § 9.1). Массы частиц не являются объектом предыдущей теории и требуют для их исследования новых физических представлений (см. главу 17).

Таким образом, выбор подгруппы $SU(2)$ в предыдущем изложении мотивируется не логическими или математическими соображениями, а стремлением получить перечень мультиплетов, совпадающий в экспериментально исследованных случаях с перечнем по признаку близости массы.

Роль второй наблюдаемой, выделяющей векторы состояний мультиплета, у нас играет заряд Q . По аналогии со спиновыми мультиплетами, для зарядовых мультиплетов был введен оператор проекции изоспина $T_3 = A_1^1 + 1/2 A_3^3$; матрица этого оператора, как и матрицы операторов A_1^2, A_2^1 , содержит лишь нули в третьей строке и третьем столбце. Но это значит, что подалгебра $ASU(2)$, порожденная операторами T_3, A_1^2, A_2^1 , соответствует подгруппе $SU(3)$, операторы которой переводят в себя плоскость $x^3 = 0$. A_1^2 и A_2^1 суть *внешние* образующие для только что описанной подалгебры; внутренними образующими являются эрмитовы бесследные операторы

$$T_1 = \frac{1}{2} (A_1^2 + A_2^1), \quad T_2 = \frac{1}{2i} (A_1^2 - A_2^1), \quad T_3. \quad (9.6.1)$$

Так как мы собираемся теперь исследовать другие возможности выделения подгруппы, то в дальнейшем операторы изоспина (9.6.1), определенные выше, мы будем иногда называть операторами *T-спина*.

Выберем теперь в качестве оператора, сохраняющего постоянное значение на каждом мультиплете, заряд Q . Тогда роль T_3 будет играть оператор

$$U_3 = A_3^3 + \frac{1}{2} A_1^1, \quad (9.6.2)$$

который называется *оператором проекции U-спина*.

Заметим, что можно было бы также взять в качестве U_3 оператор $A_2^2 + 1/2 A_1^1$, отличающийся от (9.6.2) лишь знаком.

Операторы

$$U_1 = \frac{1}{2} (A_3^2 + A_2^3), \quad U_2 = \frac{1}{2i} (A_3^2 - A_2^3), \quad U_3 \quad (9.6.3)$$

порождают подалгебру $ASU(2)$, для которой A_3^2 является повышающим, а A_2^3 — понижающим оператором. Соответствующая подгруппа $SU(3)$ состоит из операторов, переводящих в себя плоскость $x^1 = 0$.

«С точки зрения U -спина» каждый супермультиплет по-новому разбивается на мультиплеты. При этом важно отметить, что набор собственных векторов, соответствующий неприводимым представлениям новой подгруппы $SU(2)$, вообще говоря, не совпадает со старым набором собственных векторов: эти наборы отличаются не только нумерацией, но и составом. Но, согласно принятому в § 9.5 физическому истолкованию, векторы e_i рассматриваются как векторы состояний входящих в супермультиплет элементарных частиц.

Мы видим, что векторы состояний u , следовательно, самое определение понятия элементарной частицы существенно зависят от фиксированного типа изотопического спина, и теория не дает выбора между возникающими возможностями. Однако признак близости масс указывает, что в некотором смысле «природа предпочитает T -спин».

Примеры разбиения на мультиплеты с точки зрения U -спина будут приведены в главе 10, а принципиальная сторона вопроса о выборе типа изоспина будет рассмотрена в главе 17.

Отметим, еще, что оператор

$$V_3 = A_1^1 + \frac{1}{2} A_2^2 \quad (9.6.4)$$

вместе с повышающим оператором A_1^3 и понижающим оператором A_3^1 определяет подгруппу, оставляющую инвариантной плоскость $x^2 = 0$. (Можно было бы также положить $V_3 = A_3^3 + \frac{1}{2} A_2^2$ и поменять ролями A_1^3 , A_3^1 .) Полученный таким образом тип изоспина называется V -спином.

На каждом V -спиновом мультиплете постоянно значение $A_2^2 = Y - Q$; заряд и гиперзаряд равным образом пригодны для выделения векторов состояний «с точки зрения V -спина».

ПРИМЕРЫ СУПЕРМУЛЬТИПЛЕТОВ

В этой главе мы подробно рассмотрим октет барионов $F_{1/2}$ и декуплет барионов $F_{3/2}$. Применяя принципы классификации § 9.5, мы изучим геометрию октета и декуплета, т. е. расположение подпространств изотопических мультиплетов и векторов состояния отдельных частиц.

Изложение построено параллельно — с точки зрения T -спина и U -спина.

§ 10.1. Октет барионов

А. Векторы состояния с точки зрения T -спина

Эти векторы, построенные в соответствии с принципами § 9.5, перечислены в таблице (9.3.25). Сравним эту таблицу с таблицей 9.1 октета $F_{1/2}$ в § 9.1. Ясно, что следует отождествить базисные векторы таблицы (9.3.25) с векторами состояния частиц октета, взятыми в том же порядке (сверху вниз).

Теперь мы можем составить окончательную таблицу (таблицу 10.1) октета барионов $F_{1/2}$ с указанием векторов состояний, изображающих частицы. Стандартные обозначения частиц, стоящие в левом столбце, сопоставляются векторам состояний с теми же значениями заряда и гиперзаряда.

Значительная часть информации, заключенной в таблице 10.1, зависит от специального выбора в $SU(3)$ подгруппы, изоморфной $SU(2)$; мы фиксировали такую подгруппу в § 9.2.

Постараемся выделить ту часть описания супермультиплетта $F_{1/2}$, которая не зависит от способа выбора подгруппы в $SU(3)$.

Таблица 10.1

Октет барионов $F_{1/2}$: $B = 1$, $j = \frac{1}{2}$, четность +.

Редукция по T -спину

Частица	Масса	Вектор состояния	Q	Y	T
Ξ^-	1320,8	$\Phi_1^* = \Psi_3^1$	-1	-1	$1/2$
Ξ^0	1314,3	$\Phi_2^* = -\Psi_3^2$	0	-1	$1/2$
Σ^-	1197,1	$\Phi_2^1 = \Psi_2^1$	-1	0	1
Σ^0	1192,4	$\Phi_m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_1^1 - \Psi_2^2)$	0	0	1
Σ^+	1189,4	$-\Phi_1^2 = -\Psi_1^2$	1	0	1
Λ	1115,4	$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2\Psi_3^3 - \Psi_1^1 - \Psi_2^2)$	0	0	0
N^0	939,5	$\Phi_{*1} = \Psi_2^3$	0	1	$1/2$
N^+	938,3	$\Phi_{*2} = \Psi_1^3$	1	1	$1/2$

Итак, рассмотрим пока только пространство представления $\text{Sym}^0(1,1)$ и два действующих на нем оператора $Q(8)$, $Y(8)$. Тогда можно представить пространство представления в виде ортогональной суммы:

$$\text{Sym}^0(1,1) = C_{-1,-1} \oplus C_{0,-1} \oplus C_{-1,0} \oplus C_{1,0} \oplus C_{0,1} + C_{1,1} \oplus \oplus C_{0,0}(2), \quad (10.1.1)$$

где каждое слагаемое есть собственное подпространство пары операторов Q, Y ; при этом через $C_{i,k}$ обозначено одномерное подпространство, принадлежащее собственным значениям (i, k) (не равным нулю одновременно), а $C_{0,0}(2)$ — двумерное собственное подпространство, принадлежащее собственным значениям $(0,0)$. Образующие векторы подпространств $C_{i,k}$ с точностью до множителя определяются однозначно, как собственные векторы пары (Q, Y) , и совпадают с векторами состояний, стоящими в

1, 2, 3, 5, 7 и 8-й строках таблицы октета. Перечисленные векторы состояний, и тем самым частицы Ξ^- , Ξ^0 , Σ^- , Σ^+ , N^0 , N^+ , могут быть, таким образом, описаны независимо от способа выбора подгруппы в $SU(3)$.

Иначе обстоит дело с остальными двумя частицами, Σ^0 и Λ . Построение их векторов состояний существенно зависело от разложения пространства $\text{Sym}^0(1,1)$ на подпространства C_T (§ 9.5), определяемые лишь с точностью до изоморфизма, если не фиксировано положение подгруппы $SU(2)$ в $SU(3)$. В $\text{Sym}^0(1,1)$ содержится четырехмерное собственное подпространство $C_0(4)$ оператора $Y(8)$, принадлежащее собственному значению 0. В $C_0(4)$ однозначно выделяются собственные подпространства $C_{-1,0}$, $C_{1,0}$, $C_{0,0}$ (2) оператора $Q(8)$.

Дополнительная информация, которая нужна для индивидуализации частиц Σ^0 , Λ , состоит в указании пространства Φ (см. § 9.3) неприводимого представления подгруппы $SU(2)$: тогда ортогональное дополнение этого (трехмерного) пространства в $C_0(4)$ содержит вектор состояния, приписываемый одной частице с $Q = Y = 0$, а пересечение Φ с $C_{0,0}(2)$ содержит вектор состояния, приписываемый второй такой частице. Но как раз пространство Φ и не может быть указано без определенного выбора подгруппы $SU(2)$! Мы видим, таким образом, что частицы Σ^0 , Λ не могут быть индивидуализированы в рамках $SU(3)$ -теории «без фиксации изоспина».

Б. Векторы состояния с точки зрения U-спина

Посмотрим теперь, как октет разбивается на мультиплеты с точки зрения U-спина. Ясно, что в этом случае каждый мультиплет должен состоять из частиц с одинаковым зарядом, причем (поскольку число пространств C_T каждой размерности не зависит от выбора подгруппы $SU(2)$) должно быть два дублета, один триплет и один синглет. Дублеты сразу же находятся по таблице октета: Ξ^- и Σ^- имеют заряд -1 и образуют первый дублет, Σ^+ и N^+ имеют заряд 1 и образуют второй дублет; векторы состояний этих четырех частиц нам уже известны.

Собственное подпространство оператора $Q(8)$, принадлежащее собственному значению 0, четырехмерно, и мы

снова должны разложить его на трехмерное и одномерное подпространства. В трехмерное подпространство заведомо войдут векторы Ξ^0 и \mathbb{N}^0 , поскольку гиперзаряды этих частиц равны -1 и 1 .

Что касается оставшегося двумерного подпространства $C_{0,0}(2)$, то в U -синглет должен войти его вектор g , переводимый в 0 операторами $A_3^2(8)$ и $A_2^3(8)$ — повышающим и понижающим операторами для U -спина.

По аналогии с тензором Ψ_3^3 , порождающим одномерное неприводимое подпространство относительно T -спина, рассмотрим тензор Ψ_1^1 . Согласно (9.3.5)

$$A_3^2\Psi_1^1 = A_2^3\Psi_1^1 = 0. \quad (10.1.2)$$

Однако тензор Ψ_1^1 не бесследен. Бесследный тензор получается из него вполне аналогично (9.3.22):

$$g = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\Psi_1^1 - \Psi_2^2 - \Psi_3^3). \quad (10.1.3)$$

Остается найти в $C_{0,0}(2)$ вектор, ортогональный (10.1.3). Так как базис $C_{0,0}(2)$ составляют векторы Φ_m , Φ_0 (см. таблицу (9.3.25)), надо, следовательно, найти линейную комбинацию этих векторов, или, что то же, векторов $\Psi_1^1 - \Psi_2^2$, $\Psi_2^2 - \Psi_3^3$, ортогональную (10.1.3). Такой комбинацией является нормированный вектор

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_3^3 - \Psi_2^2). \quad (10.1.4)$$

Сопоставим в следующей ниже таблице (таблица 10.2) результаты разложения октета барионов на мультиплеты с точки зрения U -спина.

Нетрудно убедиться, что операторы U -спина переводят друг в друга базисные векторы каждого U -мультиплета в соответствии с принципами § 9.5. Векторы состояния g, h , которым не соответствуют элементарные частицы в смысле § 9.5, обозначены условно символами Σ^0, Λ' , без указания массы.

Мы пока не связываем эти векторы состояния с какими-либо частицами, оставляя, таким образом, за T -спином его привилегированное положение. Но в главе 17 мы увидим, что U -спин также имеет физический смысл.

Таблица 10.2

Октет барионов $F_{1/2}$: $B = 1$, $j = 1/2$, четность +
 Редукция по U -спину

Частица	Масса	Вектор состояния	Q	Y	U
Σ^-	1197,1	$Y_1^* = \Psi_2^1$	-1	0	$1/2$
Ξ^-	1320,8	$Y_2^* = \Psi_3^1$	-1	-1	$1/2$
N^0	939,5	$Y_2^1 = \Psi_2^3$	0	1	1
Σ^0	...	$Y_m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_3^3 - \Psi_2^2)$	0	0	1
Ξ^0	1314,3	$-Y_1^2 = -\Psi_3^2$	0	-1	1
Λ'	...	$Y_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2\Psi_1^1 - \Psi_2^2 - \Psi_3^3)$	0	0	0
N^+	938,3	$Y_{*1} = \Psi_1^3$	1	1	$1/2$
Σ^+	1189,4	$Y_{*2} = -\Psi_1^2$	1	0	$1/2$

§ 10.2. Декуплет барионов

А. Векторы состояния с точки зрения T -спина

Сравнивая таблицу (9.3.45) с таблицей декуплета барионов в § 9.1, мы видим, что по принципам § 9.5 следует отождествить векторы состояния с частицами в том же порядке (сверху вниз); при этом каждой частице соответствует вектор состояния, для которого собственные значения операторов Q , Y равны заряду и гиперзаряду частицы. Мы приходим, таким образом, к следующей таблице (табл. 10.3). В этой таблице на «свободное» место (изотопический синглет) поставлена частица Ω^- , обнаруженная по предсказанию $SU(3)$ -теории.

Выделим ту часть описания декуплета $F_{3/2}$, которая не зависит от выбора подгруппы в $SU(3)$, а вполне определяется представлением $\text{Sym}^0(3,0)$ группы $SU(3)$ и операторами Q , Y .

Таблица 10.3

Декуплет барионов $F_{3/2}$: $B = 1$, $j = 3/2$, четность +Редукция по T -спину

Частица	Масса	Вектор состояния	Q	Y	T
Ω^-	1679	Ψ_{333}	-1	-2	0
Ξ_8^-	1532	$\text{Sym } \Psi_{233}$	-1	-1	$1/2$
Ξ_8^0	1532	$\text{Sym } \Psi_{133}$	0	-1	$1/2$
Σ_8^-	1385	$\text{Sym } \Psi_{223}$	-1	0	1
Σ_8^0	1385	$\text{Sym } \Psi_{123}$	0	0	1
Σ_8^+	1385	$\text{Sym } \Psi_{113}$	1	0	1
Δ_8^-	1238	Ψ_{232}	-1	1	$3/2$
Δ_8^0	1238	$\text{Sym } \Psi_{122}$	0	1	$3/2$
Δ_8^+	1238	$\text{Sym } \Psi_{112}$	1	1	$3/2$
Δ_8^{++}	1238	Ψ_{111}	2	1	$3/2$

Обозначим, как и в § 10.1, через $C_{i,k}$ подпространство $\text{Sym}^0(3,0)$, состоящее из собственных векторов одновременно двух операторов Q, Y с собственными значениями, соответственно, i, k . Тогда (без употребления какой-либо подгруппы $SU(3)$) можно определить, с точностью до фазового множителя, все векторы состояния T -спина. В этом отношении декуплет устроен проще октета: в нем «индивидуализация» частиц достигается с помощью одних только значений заряда и гиперзаряда.

Б. Векторы состояния с точки зрения U -спина

Эти векторы просто совпадают с базисными векторами табл. 10.3, расположенными в другом порядке; в самом деле, при U -редукции базисные векторы также должны быть

собственными векторами одновременно двух операторов \mathbf{I} , значит, содержатся в указанной таблице. Располагая U -мультиплеты в порядке убывания Q , а базисные векторы каждого U -мультиплета в соответствии с § 9.5, VIII, мы приходим к следующей таблице (табл. 10.4).

Таблица 10.4

Декуплет барионов $F_{3/2} : B = 1, j = 3/2$, четность +

Редукция по U -спину

Частица	Масса	Вектор состояния	Q	Y	U
Δ_8^{++}	1238	Ψ_{111}	2	1	0
Σ_8^+	1385	Sym Ψ_{113}	1	0	$1/2$
Δ_8^+	1238	Sym Ψ_{112}	1	1	$1/2$
Ξ_8^0	1532	Sym Ψ_{133}	0	-1	1
Σ_8^0	1385	Sym Ψ_{123}	0	0	1
Δ_8^0	1238	Sym Ψ_{122}	0	1	1
Ω^-	1679	Ψ_{333}	-1	-2	$3/2$
Ξ_8^-	1532	Sym Ψ_{233}	-1	-1	$3/2$
Σ_8^-	1385	Sym Ψ_{223}	-1	0	$3/2$
Δ_8^-	1238	Ψ_{222}	-1	1	$3/2$

«Случайное» соединение частиц с далекими массами в U -мультиплетах решительно говорит в пользу варианта $SU(3)$ -теории, основанного на T -редукции. Однако массы пока совершенно не рассматривались в этой теории, и связь $SU(3)$ -классификации частиц с массами кажется загадочной. Мы увидим в главе 17, что $SU(3)$ -теория может быть связана с массами частиц с помощью так называемых массовых формул, для чего потребуются новые физические представления. При этом выяснится также роль U -спина.

***SU(3)*-ТЕОРИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СУПЕРМУЛЬТИПЛЕТОВ**

В этой главе производится редукция по подгруппе $SU(2)$ *любого* неприводимого представления группы $SU(3)$. Для этого вводятся так называемые параметры Вейля, позволяющие придать «количественные» формулировки принципам § 9.5: вычислить для каждого супермультиплета число входящих в него изотопических мультиплетов, их размерности и построить базисные векторы, соответствующие элементарным частицам. Поскольку даже простейший (после октета и декуплета) 27-плет еще не заполнен обнаруженными на опыте частицами, материал этой главы является «заготовкой впрок» и может быть опущен без особого ущерба для понимания систематики уже известных частиц. В дальнейшем этот материал не используется.

§ 11.1. Построение T -базиса

Бисимметрические базисные тензоры. Фиксируем некоторое неприводимое представление $\text{Sym}^0(p, q)$ группы $SU(3)$. Пространство этого представления является подпространством тензорного пространства $C(p, q)$, где также задано представление $SU(3)$ (§ 5.3). Обозначим, для краткости, через A_b^a операторы $A_b^a(N)$, представляющие операторы Окубо в пространстве $\text{Sym}^0(p, q)$ ($N=N(p, q)$). Так же мы будем обозначать и операторы, представляющие операторы Окубо в $C(p, q)$ и сводящиеся к предыдущим на подпространстве $\text{Sym}^0(p, q)$. Тогда, согласно (5.3.26), действие операторов A_b^a на базисные тензоры

$$\Psi_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q} = e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_p} \otimes \tilde{e}^{b_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{b_q} \quad (11.1.1)$$

задается формулой

$$A_a^a \Psi_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q} = \left[p_a - q_a - \frac{1}{3}(p - q) \right] \Psi_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q} \quad (\text{н.с.}), \quad (11.1.2)$$

где p_a — число индексов a_i , равных a , q_a — число индексов b_j , равных a . В частности, для операторов заряда $Q = A_1^1$, гиперзаряда $Y = -A_3^3$ и проекции изоспина $T_3 = A_1^1 + \frac{1}{2} A_3^3$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} \text{с. зн. } Q: & p_1 - q_1 - \frac{1}{3}(p - q), \\ \text{с. зн. } Y: & -(p_3 - q_3) + \frac{1}{3}(p - q), \\ \text{с. зн. } T_3: & \frac{1}{2} [(p_1 - q_1) - (p_2 - q_2)] = \\ & = \frac{1}{2} [(p_1 - q_2) - (p_2 + q_1)]; \end{aligned} \right\} \quad (11.1.3)$$

при выводе последнего соотношения использованы равенства

$$p_1 + p_2 + p_3 = p, \quad q_1 + q_2 + q_3 = q. \quad (11.1.4)$$

Как показывают формулы (11.1.3), не только все базисные тензоры (11.1.1), но и все бисимметрические тензоры $T(p, q)$ с единственным отличным от нуля числом заполнения (ср. § 3.6)

$$T_{q_1, q_2, q_3}^{p_1, p_2, p_3} \quad (11.1.5)$$

являются собственными векторами операторов Q, Y (и, следовательно, T_3), причем собственные значения находятся по формулам (11.1.3).

Теперь нетрудно построить базис в пространстве $\text{Sym}(p, q)$ всех бисимметрических тензоров, состоящий из собственных векторов тех же операторов Q, Y .

Построим тензоры

$$\Phi_{p_1, p_2, p_3}^{q_1, q_2, q_3} = \nu \sum_{\alpha, \beta}^1 e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_{p_2}} \otimes \tilde{e}_1^{\beta_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}_q^{\beta_{q_2}}, \quad (11.1.6)$$

где суммирование распространяется на все наборы $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, содержащие p_1 единиц, p_2 двоек и p_3 троек, и все наборы $(\beta_1, \dots, \beta_q)$, содержащие q_1 единиц, q_2 двоек и

q_3 троек; v — нормирующий множитель. Легко видеть, что тензоры (11.1.6) при надлежащем выборе множителей v составляют требуемый (ортонормированный) базис в $\text{Sym}(p, q)$.

Проектирование на $\text{Sym}^0(p, q)$. Теперь мы хотим построить в пространстве $\text{Sym}^0(p, q)$ бесследных бисимметрических тензоров аналогичный базис, состоящий из собственных векторов операторов A_1^1, A_3^3 .

Обозначим через P представление группы $SU(3)$ в пространстве $\text{Sym}(p, q)$, описанное в § 5.2. На подпространстве $\text{Sym}^0(p, q)$ P сводится к $\text{Sym}^0(p, q)$ (обозначаемому тем же символом неприводимому представлению).

Каждый вектор z пространства $\text{Sym}(p, q)$ однозначно представим в виде

$$z = x + y, \quad (11.1.7)$$

где x лежит в $\text{Sym}^0(p, q)$, а y — в ортогональном дополнении $\text{Sym}^\oplus(p, q)$. Поскольку $\text{Sym}^0(p, q)$ — инвариантное подпространство для представления P и P унитарно, легко доказать, что и $\text{Sym}^\oplus(p, q)$ — инвариантное подпространство для P . Поэтому для любого представляющего оператора \bar{U} имеем:

$$\bar{U}z = \bar{U}x + \bar{U}y, \quad (11.1.8)$$

где $\bar{U}x$ лежит в $\text{Sym}^0(p, q)$, а $\bar{U}y$ — в $\text{Sym}^\oplus(p, q)$. То же верно и для представляющих операторов \tilde{A} алгебры Ли, которые являются пределами представляющих операторов группы Ли:

$$\tilde{A}z = \tilde{A}x + \tilde{A}y. \quad (11.1.9)$$

Введем оператор проектирования \circ , ставящий в соответствие каждому вектору $\text{Sym}(p, q)$ его проекцию на $\text{Sym}^0(p, q)$ (ср. (3.6.18)):

$$\circ z = x. \quad (11.1.10)$$

Тогда из (11.1.9) следует, что

$$\circ \tilde{A} = \tilde{A} \circ. \quad (11.1.11)$$

Векторы

$$\circ \Phi_{\substack{q_1, q_2, q_3 \\ p_1, p_2, p_3}} \quad (11.1.12)$$

представляют собой проекции *всех* векторов базиса (11.1.6) и являются поэтому *системой образующих* подпространства $\text{Sym}^0(p, q)$ (зависимой и не ортогональной!). В силу (11.1.11) каждый вектор (11.1.12) является собственным вектором операторов A_1^1, A_3^3 , принадлежащим тем же собственным значениям, что и соответствующий вектор (11.1.6).

Векторы (11.1.12), принадлежащие различным собственным значениям хотя бы одного из этих (эрмитовых) операторов, ортогональны. Векторы (11.1.12), принадлежащие одной и той же паре собственных значений, порождают подпространство, в котором можно выбрать ортонормированный базис из их линейных комбинаций. Заметим теперь, что набор всех собственных значений операторов A_1^1, A_3^3 , рассматриваемых на подпространстве $\text{Sym}^0(p, q)$, совпадает с набором всех собственных значений тех же операторов на $\text{Sym}^0(p, q)$.

Вычисление проекций (11.1.12) в общем случае довольно громоздко и может быть выполнено, исходя из следующих соображений*). Как и всякий вектор пространства $\text{Sym}(p, q)$, (11.1.12) разлагается в линейную комбинацию векторов базиса (11.1.6); при этом в линейную комбинацию могут войти лишь базисные векторы с теми же собственными значениями (11.1.3), что и у вектора (11.1.12). Таким образом,

$$\circledast \Phi_{p_1, p_2, p_3}^{q_1, q_2, q_3} = \sum_{k+l+m=0} \alpha_{klm} \Phi_{p_1+k, p_2+l, p_3+m}^{q_1+k, q_2+l, q_3+m}. \quad (11.1.13)$$

Обозначая правую часть (11.1.13) через T и произвольную линейную комбинацию векторов

$$\Phi_{p_1+k, p_2+l, p_3+m}^{q_1+k, q_2+l, q_3+m} \quad (k+l+m=0)$$

через R , имеем для определения коэффициентов α_{klm} условия:

$$\text{Sp } T = 0, \quad (\Phi_{p_1, p_2, p_3}^{q_1, q_2, q_3} - T | R) = 0 \quad \text{при} \quad \text{Sp } R = 0. \quad (11.1.14)$$

*) Подробные вычисления проведены в дипломной работе С. С. Аминовой, откуда мы заимствуем также доказательство (11.1.20) (Новосибирский университет, 1967 г.).

Здесь $\text{Sp } R$ означает результат свертывания тензора R по первому контравариантному и первому ковариантному индексам (см. (3.5.7)).

Представление на подалгебре $ASU(2)$. Представление \tilde{P} алгебры $ASU(3)$ в пространстве $\text{Sym}(p, q)$ индуцирует представление \tilde{P}_1 подалгебры $ASU(2)$ в том же пространстве.

Рассматривая \tilde{P} на подпространстве $\text{Sym}^0(p, q)$, мы получаем представление алгебры Ли $ASU(3)$, соответствующее неприводимому представлению группы $SU(3)$; обозначим это представление алгебры Ли (также неприводимое, по общей теореме теории представлений) через \tilde{P}^0 .

\tilde{P}^0 индуцирует на подалгебре $ASU(2)$ представление \tilde{P}_1^0 , которое, как правило, приводимо (ср. условие 3 из § 9.1, объясняющее физическое значение \tilde{P}_1^0).

Нам надо разложить \tilde{P}_1^0 на неприводимые представления. В § 5.1 были изучены все неприводимые представления $SU(2)$ и тем самым алгебры $ASU(2)$; каждое из них может быть получено следующим способом. В пространстве $\text{Sym}^0(p, q)$ берется произвольный собственный вектор e оператора T_3 ; тогда векторы

$$T_+e, T_+^2e, \dots, T_-e, T_-^2e, \dots, \quad (11.1.15)$$

где

$$T_+ = a_1^2 = A_1^2, T_- = a_2^1 = A_2^1, \quad (11.1.16)$$

составляют базис неприводимого подпространства C_e (ср. §§ 6.5, 7.2).

Обозначим соответствующую неприводимую компоненту представления \tilde{P}_1^0 через \tilde{P}_{1e}^0 ; тогда, поскольку в качестве e можно взять *любой* собственный вектор эрмитова оператора T_3 , представление \tilde{P}_1^0 разлагается в ортогональную сумму неприводимых представлений \tilde{P}_{1e}^0 (которые, разумеется, должны быть взяты лишь для *некоторых* e , так как не все \tilde{P}_{1e}^0 различны). Теперь надо исследовать, какие из неприводимых представлений алгебры $ASU(2)$ действительно встречаются в этом разложении.

Покажем, прежде всего, что *каждое подпространство C_e состоит из собственных векторов оператора A_3^3 , принадлежащих одному и тому же собственному значению этого оператора.*

В самом деле, A_3^3 перестановочен с T_3 и имеет на C_6 только простые собственные значения, так что все векторы (11.1.15) — собственные для A_3^3 ; так как, кроме того, A_3^3 перестановочен с T_+ , T_- , соответствующие собственные значения равны. Приступая теперь к перечислению представлений \tilde{P}_{1c}^0 , входящих в разложение \tilde{P}_1^0 , фиксируем произвольную пару целых чисел $p_3, q_3, 0 \leq p_3 \leq p, 0 \leq q_3 \leq q$.

Рассмотрим в пространстве $\text{Sym}(p, q)$ вектор

$$\Phi_{p_1, 0, p_3}^{0, q_2, q_3}, \quad p_1 = p - p_3, \quad q_2 = q - q_3. \quad (11.1.17)$$

Этому вектору, согласно (11.1.3), принадлежат собственные значения

$$p_1 - \frac{1}{3}(p - q), \quad (p_3 - q_3) - \frac{1}{3}(p - q), \quad \frac{1}{2}(p_1 + q_2) \quad (11.1.18)$$

операторов A_1^1, A_3^3, T_3 .

Из (5.3.24) следует, что

$$A_1^2 \Phi_{p_1, 0, p_3}^{0, q_2, q_3} = 0. \quad (11.1.19)$$

Покажем, что

$$\odot \Phi_{p_1, 0, p_3}^{0, q_2, q_3} \neq 0. \quad (11.1.20)$$

Как легко видеть, при $p_3 = 0$ или $q_3 = 0$ тензор $\Phi_{p_1, 0, p_3}^{0, q_2, q_3}$ уже бесследен; поэтому можно предполагать, что $p_3 \neq 0, q_3 \neq 0$. (11.1.20) будет доказано, если мы построим бесследный бисимметрический тензор R , не ортогональный (11.1.17). Для этого найдем такой бисимметрический тензор R' , что

$$R = \Phi_{p_1, 0, p_3}^{0, q_2, q_3} - R' \quad (11.1.21)$$

бесследен и

$$(\Phi_{p_1, 0, p_3}^{0, q_2, q_3} | R') = 0. \quad (11.1.22)$$

Легко проверить, что в качестве R' в (11.1.21) можно взять тензор вида

$$\sum_k \lambda_k \Phi_{p_1, k, p_3-k}^{0, q_2+k, q_3-k}, \quad k = 1, 2, \dots, \min(p_3, q_3). \quad (11.1.23)$$

Теперь, в силу (11.1.11), (11.1.19),

$$A_1^2 \circ \Phi_{p_1, 0, p_3}^{0, q_2, q_3} = \circ A_1^2 \Phi_{p_1, 0, p_3}^{0, q_2, q_3} = 0;$$

следовательно, собственный вектор

$$e = \circ \Phi_{p_1, 0, p_3}^{0, q_2, q_3}$$

оператора T_3 занимает в последовательности (11.1.15) *конечное* положение. Но тогда степень представления \tilde{P}_{1e}^0 равна $2T + 1$, где T — принадлежащее e , или что то же, принадлежащее вектору (11.1.17), собственное значение T_3 . Из формулы (11.1.18) вытекает, что

$$T = \frac{1}{2}(p_1 + q_2) = \frac{1}{2}[(p + q) - (p_3 + q_3)]. \quad (11.1.24)$$

Итак, каждой паре целых чисел p_3, q_3 , $0 \leq p_3 \leq p$, $0 \leq q_3 \leq q$, соответствует входящее в разложение \tilde{P}_1^0 неприводимое представление степени

$$2T + 1 = (p + q) - (p_3 + q_3) + 1.$$

Обозначим это представление через $\tilde{P}_1^0(p_3, q_3)$; представления $\tilde{P}_1^0(p_3, q_3)$, соответствующие различным парам (p_3, q_3) , не совпадают, так как различаются либо собственным значением оператора A_3^2 (определяемым числом $p_3 - q_3$), либо степенью $2T + 1$ (определяемой числом $p_3 + q_3$). Сумма степеней таких представлений

$$\begin{aligned} \sum_{(p_3, q_3)} (2T + 1) &= \sum_{p_3=0}^p \sum_{q_3=0}^q [(p + q) - (p_3 + q_3) + 1] = \\ &= \frac{1}{2}(p + 1)(q + 1)(p + q + 2), \end{aligned}$$

согласно формуле (5.2.17), равна степени представления $\text{Sym}^0(p, q)$. Так как размерность пространства представления $\text{Sym}^0(p, q)$ равна сумме размерностей его подпространств, неприводимых относительно представления \tilde{P}_1^0 , то каждое представление $\tilde{P}_1^0(p_3, q_3)$ входит в разложение \tilde{P}_1^0 в точности *один раз*:

$$\tilde{P}_1^0 = \bigoplus_{p_3=0}^p \bigoplus_{q_3=0}^q \tilde{P}_1^0(p_3, q_3). \quad (11.1.25)$$

Обозначим через $C_{(p_3, q_3)}$ подпространство представления $\tilde{P}_1^0(p_3, q_3)$. Тогда, как мы видели (см. (11.1.18)), собственное значение A_3^3 для всех векторов $C_{(p_3, q_3)}$ равно

$$(p_3 - q_3) - \frac{1}{3}(p - q). \quad (11.1.26)$$

Поскольку $A_1^1 = T_3 - \frac{1}{2}A_3^3$ и собственные значения T_3 на пространстве $C_{(p_3, q_3)}$ получаются из T вычитанием последовательных целых чисел (§ 9.5), собственные значения A_1^1 для векторов $C_{(p_3, q_3)}$ равны

$$-\frac{1}{3}(p + 2q) + q_3, \quad -\frac{1}{3}(p + 2q) + q_3 + 1, \dots, \\ \frac{1}{3}(2p + q) - p_3 - 1, \quad \frac{1}{3}(2p + q) - p_3. \quad (11.1.27)$$

Как легко видеть, удвоенное среднее значение чисел (11.1.27) равно числу (11.1.26), взятому с обратным знаком.

Часто вместо параметров p_3, q_3 удобно пользоваться для нумерации представлений и собственных значений параметрами Вейля

$$\lambda = p + q - p_3, \quad \mu = q_3. \quad (11.1.28)$$

Очевидно,

$$0 \leq \mu \leq q \leq \lambda \leq p + q. \quad (11.1.29)$$

Неприводимое представление $\tilde{P}_1^0(p_3, q_3)$ мы теперь обозначим через $\tilde{P}_1^0(\lambda, \mu)$; тогда (11.1.25) примет вид

$$\tilde{P}_1^0 = \bigoplus_{\lambda=q}^{p+q} \bigoplus_{\mu=0}^q \tilde{P}_1^0(\lambda, \mu); \quad (11.1.30)$$

собственное значение A_3^3 для векторов соответствующего неприводимого подпространства $C_{(\lambda, \mu)}$ равно

$$\frac{2}{3}(p + 2q) - (\lambda + \mu), \quad (11.1.31)$$

а степень представления есть

$$\lambda - \mu + 1. \quad (11.1.32)$$

Собственные значения A_1^1 на $C_{(\lambda, \mu)}$ суть

$$\mu - \frac{1}{3}(p + 2q), \mu - \frac{1}{3}(p + 2q) + 1, \dots, \\ \lambda - \frac{1}{3}(p + 2q) - 1, \lambda - \frac{1}{3}(p + 2q). \quad (11.1.33)$$

Введем теперь для нумерации собственных значений A_1^1 на $C_{(\lambda, \mu)}$ третий параметр Вейля ν ,

$$\mu \leq \nu \leq \lambda; \quad (11.1.34)$$

тогда собственные значения (11.1.33) можно записать в виде

$$\nu - \frac{1}{3}(p + 2q), \quad \mu \leq \nu \leq \lambda. \quad (11.1.35)$$

Как вытекает из теории представлений группы $SU(2)$ (§ 6.5), все собственные значения оператора A_1^1 на пространстве $C_{(\lambda, \mu)}$ — простые; следовательно, соответствующие (нормированные) собственные векторы ортогональны. Обозначим такой вектор, принадлежащий собственному значению (11.1.35), через

$$\Phi(\lambda, \mu, \nu). \quad (11.1.36)$$

Так как неприводимые подпространства $C_{(\lambda, \mu)}$ ортогональны друг другу, то векторы (11.1.36) при значениях параметров Вейля, меняющихся в пределах (11.1.29), (11.1.34), образуют полную ортонормированную систему в пространстве $\text{Sym}^0(p, q)$.

Поскольку параметры λ, μ определяют подпространство $C_{(\lambda, \mu)}$, а параметр ν определяет простое собственное значение в этом подпространстве, векторы (11.1.36) определены с точностью до множителя, по модулю равно единице.

§ 11.2. Уточнение принципов $SU(3)$ -классификации

Мы можем теперь уточнить принципы классификации элементарных частиц, изложенные в § 9.5, придав им количественные формулировки.

Разрешенные представления $SU(3)$. Согласно принципу VI (стр. 196), существующие в природе супермультиплеты соответствуют лишь тем неприводимым представлениям $SU(3)$, для которых все собственные значения операторов

заряда и гиперзаряда целочисленны. Но эти собственные значения мы вычислили для любого представления $Sym^0(p, q)$ (см. (11.1.3)). Для их целочисленности необходимо и достаточно, чтобы $p - q$ делилось на три:

Супермультиплеты адронов соответствуют тем, и только тем, представлениям $Sym^0(p, q)$ группы $SU(3)$, для которых $p - q$ делится на три.

Из размерностей (5.2.19) «разрешенными» оказываются

$$1, 8, 10, 27, 28, 35, 55, 64, 80, 81, 91, 125, 136, \\ 143, 154, \dots \quad (11.2.1)$$

Перечень мультиплетов. Формула (11.1.29) дает возможность перечислить все мультиплеты, входящие в супермультиплет $Sym^0(p, q)$, чем уточняется принцип VII (стр. 197):

Все мультиплеты супермультиплета $Sym^0(p, q)$ могут быть занумерованы всевозможными парами целых чисел (λ, μ) , удовлетворяющими неравенствам

$$0 \leq \mu \leq q \leq \lambda \leq p + q. \quad (11.2.2)$$

Строение мультиплетов. Из формул (11.1.33), (11.1.31) следует уточнение принципа VIII (стр. 197):

Мультиплет (λ, μ) состоит из $\lambda - \mu + 1$ частиц, изображаемых векторами состояний $\Phi(\lambda, \mu, \nu)$, где $\mu \leq \nu \leq \lambda$. Частицы мультиплета (λ, μ) имеют общие: значение гиперзаряда

$$Y = \lambda + \mu - \frac{2}{3}(p + 2q), \quad (11.2.3)$$

заряды

$$Q = \nu - \frac{1}{3}(p + 2q) \quad (\mu \leq \nu \leq \lambda) \quad (11.2.4)$$

и проекции изоспина

$$T_3 = -\frac{1}{2}(\lambda + \mu) + \nu. \quad (11.2.5)$$

Наибольшее значение проекции изоспина для мультиплета

$$T = \frac{1}{2}(\lambda - \mu) \quad (11.2.6)$$

называется изоспином мультиплета, а также каждой входящей в него частицы.

Для античастиц — барионов надо взять с обратным знаком правые части (11.2.3) — (11.2.5). Числа Y и T полностью определяют λ , μ , а число Q определяет ν . Отсюда следует теорема:

Для данного супермультиплета (p, q) числа Q , Y , T однозначно характеризуют частицу супермультиплета, а Y , T — мультиплет. Именно,

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= T + \frac{1}{2}Y + \frac{1}{3}(p + 2q), \\ \mu &= -T + \frac{1}{2}Y + \frac{1}{3}(p + 2q), \\ \nu &= Q + \frac{1}{3}(p + 2q). \end{aligned} \right\} \quad (11.2.7)$$

Далее, нетрудно, указать пределы изменения Q для мультиплета с данными Y , T :

$$\begin{aligned} \mu - \frac{1}{3}(p + 2q) = -T + \frac{1}{2}Y \leq Q \leq T + \frac{1}{2}Y = \\ = \lambda - \frac{1}{3}(p + 2q). \end{aligned} \quad (11.2.8)$$

Область изменения Y , T для данного супермультиплета изображена на рис. 2; она ограничена прямыми

$$\begin{aligned} T + \frac{1}{2}Y = -\frac{1}{3}(p - q), \quad T + \frac{1}{2}Y = \frac{1}{3}(2p + q), \\ T - \frac{1}{2}Y = \frac{1}{3}(p + 2q), \quad T - \frac{1}{2}Y = \frac{1}{3}(p - q), \end{aligned}$$

Рядом изображена область изменения параметров Вейля λ , μ . Рис. 2 поясняет, почему для перечисления мультиплетов и частиц, входящих в супермультиплет, удобнее пользоваться параметрами Вейля, чем параметрами Y , T , Q ; рассматривая (λ, μ, ν) как номер частицы, можно затем найти ее заряд, гиперзаряд и изоспин по формулам (11.2.3), (11.2.4), (11.2.6).

Рассмотрим в качестве примера 27-плет, соответствующий представлению $\text{Sym}^0(2, 2)$. В этом случае $p = q = 2$ и пары (λ, μ) , удовлетворяющие (11.2.2), суть

$$(2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 0), (4, 1), (4, 2). \quad (11.2.9)$$

Таким образом, имеется девять мультиплетов. Их размерности $\lambda - \mu + 1$ равны, соответственно,

$$3, 2, 1, 4, 3, 2, 5, 4, 3, \quad (11.2.10)$$

так что имеется один 5-плет, два квадруплета, три триплетта, два дублета и один синглет. Соответствующие

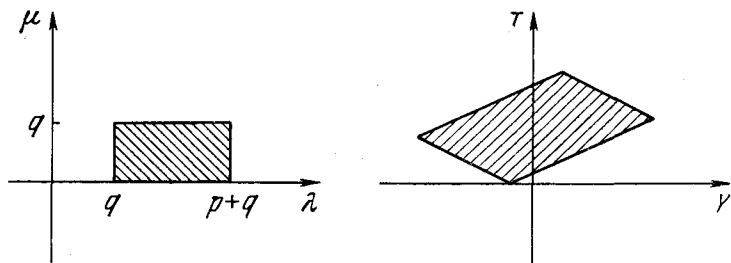


Рис. 2.

значения Q , Y находятся по формулам (11.2.4), (11.2.3), и мы получаем значения, собранные в таблице 11.1.

Таблица 11.1

27-плет в T -редукции

λ, μ, ν	Q	Y	T
2,2,2	0	0	0
2,1,1	-1	-1	$1/2$
2,1,2	0	-1	$1/2$
3,2,2	0	1	$1/2$
3,2,3	1	1	$1/2$
2,0,0	-2	-2	1
2,0,1	-1	-2	1
2,0,2	0	-2	1
3,1,1	-1	0	1
3,1,2	0	0	1
3,1,3	1	0	1

λ, μ, ν	Q	Y	T
4,2,2	0	2	1
4,2,3	1	2	1
4,2,4	2	2	1
3,0,0	-2	-1	$3/2$
3,0,1	-1	-1	$3/2$
3,0,2	0	-1	$3/2$
3,0,3	1	-1	$3/2$
4,1,1	-1	1	$3/2$
4,1,2	0	1	$3/2$
4,1,3	1	1	$3/2$
4,1,4	2	1	$3/2$
4,0,0	-2	0	2
4,0,1	-1	0	2
4,0,2	0	0	2
4,0,3	1	0	2
4,0,4	2	0	2

ПОСТРОЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ ИЗ КВАРКОВ

В этой главе излагается гипотеза Гелл-Манна о строении вещества из кварков. Эта гипотеза связывает $SU(3)$ -теорию со спином, позволяя формально приписать супермультиплетам значения спина в зависимости от их кваркового состава. Более глубокие связи между спином и $SU(3)$ -теорией обнаруживаются в теории группы симметрии $SU(6)$, к которой эта глава и служит естественным переходом.

§ 12.1. Системы частиц со спином в квантовой механике

Согласно § 7.3 спиновое состояние *одной* частицы описывается в квантовой механике вектором пространства $C(2j + 1)$, где j — целое или полуцелое число.

Пусть теперь дана система из *двух* частиц со спинами, соответственно, j, j' . Тогда спиновое состояние системы описывается в квантовой механике вектором пространства

$$C = C(2j + 1) \otimes C(2j' + 1). \quad (12.1.1)$$

В пространстве $C(2j + 1)$ и в пространстве $C(2j' + 1)$ действуют неприводимые представления $\text{Sym}(2j + 1, 0)$, $\text{Sym}(2j' + 1, 0)$ группы $SU(2)$ (см. § 5.1), определяющие представление той же группы

$$P = \text{Sym}(2j + 1, 0) \otimes \text{Sym}(2j' + 1, 0) \quad (12.1.2)$$

в пространстве (12.1.1). Представление P , за исключением тривиальных случаев $j = 0$, $j' = 0$, оказывается *приводимым*.

Разложение представления P на неприводимые представления приводит к разложению пространства C на неприводимые подпространства:

$$C = \bigoplus_k C_k. \quad (12.1.3)$$

Можно показать, что размерности пространств C_k все различны и принимают всевозможные целые значения от $2|j - j'| + 1$ до $2(j + j') + 1$ включительно. Если размерность C_k равна $2l + 1$, то всем состояниям системы из двух частиц, изображаемым векторами подпространства C_k , приписывается *спин* l . В общем случае вектор состояния системы Ψ , согласно (12.1.3), разлагается в сумму

$$\Psi = \sum c_k \Psi_k, \quad (12.1.4)$$

где Ψ_k принадлежит C_k . По общему принципу квантовой механики (ср. § 6.3), $|c_k|^2$ истолковывается как *вероятность того, что система имеет спин* l ($2l + 1 = \dim C_k$).

Наконец, если система находится в состоянии со спином l , то оператор проекции спина J_3 позволяет выделить $2l + 1$ векторов состояния с определенным значением J_3 (как это было сделано в § 6.5 для оператора M_3).

В качестве примера рассмотрим систему из двух орбитальных электронов атома гелия. В этом случае $j = j' = 1/2$, $C = C(2) \otimes C(2) = C(4)$. Векторы C суть произвольные тензоры типа $T(2, 0)$ (дважды контравариантные). Пространство разлагается в ортогональную сумму подпространств симметрических и антисимметрических тензоров:

$$C = \text{Sym}(2, 0) \otimes \text{Asym}(2, 0). \quad (12.1.5)$$

Первое из этих подпространств трехмерно (ср. § 5.1), следовательно, второе одномерно. Спектр атома гелия, соответственно этому, показывает, что атом этот может находиться в двух спиновых состояниях: ортосостоянии со спином 1 и парасостоянии со спином 0, причем парасостояние не вырождено, а ортосостояние трехкратно

вырождено. Атом гелия в ортосостоянии может иметь проекцию спина, равную, соответственно, $-1, 0, 1$.

Гипотеза о кварках состоит в том, что адрон рассматривается как сложная система, состоящая из гипотетических «частиц» — кварков и антикварков. Состояние этой системы описывается с помощью изложенной выше схемы, с той разницей, что роль обычного спина играет «унитарный спин»; это значит, что состояние кварка или антикварка описывается вектором пространства $C(3)$, а состояние адрона — тензором, валентность которого определяется числом кварков и антикварков, входящих в адрон. Разлагая полученные тензорные представления группы $SU(3)$ на неприводимые, мы истолковываем состояния, «чистые по унитарному спину», т. е. изображаемые векторами какого-либо из неприводимых подпространств, как супермультиплеты $SU(3)$ -теории. В этом смысле супермультиплет может быть составлен из данного числа кварков и антикварков. Таким образом, с «кварковой» точки зрения синглет, октет, декуплет и т. д., полученные разложением данного тензорного представления, аналогичны пара- и ортосостоянию атома гелия.

В следующем параграфе мы придадим только что сделанным предположениям точную форму.

Следует иметь при этом в виду, что роль аналога обычного спина в этом построении играет «унитарный спин», что означает переход от группы симметрии $SU(2)$ к $SU(3)$. Кваркам приписывается, кроме того, и обычный спин, но для лучшего понимания аналогии с квантовой механикой мы вначале не будем его вводить.

§ 12.2. Основные предположения о кварках

1. *Предположим, что существуют барионы, описываемые в $SU(3)$ -теории представлениями $\text{Sym}^0(1, 0)$ и $\text{Sym}^0(0, 1)$ (векторным и ковекторным).*

Это предположение, конечно, противоречит запрету, содержащемуся в § 9.5, VI, так как частицы, описываемые представлениями $\text{Sym}^0(1, 0)$, $\text{Sym}^0(0, 1)$, имеют дробные заряды и гиперзаряды.

Как мы увидим ниже, вводимые частицы используются для составления из них «более сложных» частиц — обычных

элементарных частиц. Это делается аналогично построениям квантовой механики, описанным в § 12.1.

Возможно, что частицы типов $(1, 0)$, $(0, 1)$ «существуют» лишь в этом формальном смысле. Возможно также, что они существуют и «отдельно», в несвязанном виде; но до сих пор частицы с дробным зарядом в природе не обнаружены. Итак, смысл слова «существуют» в предположении I пока чисто формальный.

Частицы типа $(1, 0)$ называются *кварками*, частицы типа $(0, 1)$ — *антикварками*. Так как представления $\text{Sym}^0(1, 0)$, $\text{Sym}^0(0, 1)$ трехмерны, существуют три кварка и три антикварка; заряды и гиперзаряды их, а также принятые для них обозначения содержатся в следующей таблице:

	Q	Y
p	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
n	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
λ	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

	Q	Y
\bar{p}	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
\bar{n}	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$\bar{\lambda}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

(12.2.1)

Подчеркнем, что эти значения зарядов и гиперзарядов вытекают из $SU(3)$ -теории (см. (11.2.3)), (11.2.4)); тесная связь между $SU(3)$ -теорией и кварками будет видна из дальнейшего.

II. *Каждый супермультиплет адронов может быть составлен из кварков и антикварков в следующем смысле. Строятся тензорное пространство $C(r, s)$ и стандартное представление группы $SU(3)$ в этом пространстве (§ 5.3).*

Неприводимые слагаемые этого представления дают перечень супермультиплетов, состоящих из r кварков и s антикварков.

Пространство $C(r, s)$ есть тензорное произведение r экземпляров пространства $C(3)$ и s экземпляров пространства $\bar{C}(3)$.

Таким образом, супермультиплет «состоит» из кварков и антикварков точно в том же смысле, в котором «более сложная» частица в квантовой механике состоит из «более простых» и который описан в § 12.1. Ниже мы приведем подробные результаты о возможном кварковом составе супермультиплетов.

III. *Кварковый состав отдельной частицы супермультиплета, состоящего из r кварков и s антикварков, определяется следующим образом. В пространстве неприводимого представления этого супермультиплета строится T -базис из собственных векторов Q, Y . Эти базисные векторы изображают частицы супермультиплета (§ 9.5, VIII); каждый из них лежит в тензорном пространстве $C(r, s)$ и, следовательно, выражается в виде полинома от базисных векторов e_1, e_2, e_3 пространства $C(3)$ и базисных ковекторов $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$ пространства $\bar{C}(3)$ степени $r + s$. Замена $e_1, e_2, e_3, \bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$, соответственно, на $p, n, \lambda, \bar{p}, \bar{n}, \bar{\lambda}$ приводит к формуле, выражающей кварковый состав частицы.*

Рассмотрим, например, какие супермультиплеты можно составить из трех кварков. Для этого надо разложить на неприводимые составляющие представление группы $SU(3)$ в тензорном пространстве $C(3, 0)$. Выделим, прежде всего, в $C(3, 0)$ подпространство $\text{Sym}(3, 0)$ всех симметрических тензоров; соответствующее неприводимое представление определяет декуплет частиц (ср. таблицу 10.3).

Вектору $\text{Sym } \Psi_{112} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Sigma e_1 \otimes e_1 \otimes e_2$ соответствует формула кваркового состава

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (ppn + pnp + npp). \quad (12.2.2)$$

Содержание формулы (12.2.2) можно выразить упрощенно таким образом: частица состоит из двух p -кварков и одного n -кварка. Аналогично записывается кварковый состав других частиц декуплета:

• Другим неприводимым подпространством является подпространство тензоров $T^{\alpha[\beta, \gamma]}$, антисимметрических относительно двух последних индексов и удовлетворяющих

условию $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} T^{\alpha[\beta\gamma]} = 0$; ему соответствует неприводимое представление $SU(3)$, эквивалентное T_1^1 (см. § 5.2), и тем самым октет частиц.

Вектор состояния

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{112} - \Psi_{121}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 - e_1 \otimes e_2 \otimes e_1)$$

при изоморфизме пространств, осуществляющем эту эквивалентность, переходит в $\Psi_1^3 = e_1 \otimes \bar{e}^3$ (ср. с таблицей 10.1 из § 10.1, А). Кварковый состав соответствующей частицы дается формулой

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (ppn - pnr). \quad (12.2.3)$$

Эта частица, так же как и описанная выше, состоит из двух p -кварков и одного n -кварка, но ее вектор кваркового состава (12.2.3) ортогонален вектору (12.2.2).

Второй октет получается аналогично: надо сначала антисимметризовать тензоры $T^{\alpha\beta\gamma}$ по первым двум индексам, а затем симметризовать по двум последним.

Наконец, получаем синглет с кварковой формулой

$$\frac{1}{\sqrt{6}} (pn\lambda + n\lambda p + \lambda pn - p\lambda n - \lambda n p - n\lambda p), \quad (12.2.4)$$

состоящей из кварков p, n, λ .

Рассмотрим, далее, частицы, которые можно составить из одного кварка и одного антикварка. Для этого надо разложить на неприводимые составляющие представление группы $SU(3)$ в тензорном пространстве $C(1, 1)$.

Бесследные тензоры $T(1, 1)$ определяют восьмимерное неприводимое подпространство, соответствующее октету. Кварковый состав частиц этого октета непосредственно виден из таблицы § 10.1, А; например, вектору $e_2 \otimes \bar{e}^3$ соответствует кварковый состав

$$n\bar{\lambda}, \quad (12.2.5)$$

т. е. частица, состоящая из кварка n и антикварка $\bar{\lambda}$.

Вектору $\frac{1}{\sqrt{6}} (2e_3 \otimes \bar{e}^3 - e_1 \otimes \bar{e}^1 - e_2 \otimes \bar{e}^2)$ соответствует

кварковый состав

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(2\lambda\bar{\lambda} - p\bar{p} - n\bar{n}). \quad (12.2.6)$$

В этом случае в кварковую формулу входят *различные* комбинации кварков. Это можно истолковать в смысле, указанном в § 12.1: частица с вектором состояния (12.2.6) с вероятностью $2/3$ состоит из кварка λ и антикварка $\bar{\lambda}$, с вероятностью $1/6$ — из p и \bar{p} и с вероятностью $1/6$ — из n и \bar{n} . Иначе говоря, существование этой частицы можно себе представить как последовательность рождений и аннигиляций пар из кварка и антикварка, причем две трети времени она существует в состоянии $\lambda\bar{\lambda}$, а остальное время — поровну в состояниях $p\bar{p}$, $n\bar{n}$.

Векторы, ортогональные подпространству октета, кратны $\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 \otimes \bar{e}^1 + e_2 \otimes \bar{e}^2 + e_3 \otimes \bar{e}^3)$; таким образом, из одного кварка и одного антикварка можно еще составить синглет

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(p\bar{p} + n\bar{n} + \lambda\bar{\lambda}), \quad (12.2.7)$$

истолковываемый так же, как это было сделано в случае (12.2.6).

По определению базиса, каждый вектор состояния является собственным вектором операторов Q , Y . С помощью формулы (5.3.26) нетрудно убедиться, что соответствующие собственные значения Q и Y равны сумме зарядов (гиперзарядов) кварков и антикварков, составляющих частицу с данным вектором состояния. Таким образом, *при составлении частиц из кварков и антикварков заряд и гиперзаряд оказываются аддитивными наблюдаемыми.*

Другой аддитивной наблюдаемой, связанной с элементарными частицами, является *проекция спина* (обычного J -спина!). Как мы знаем, спин не является объектом $SU(3)$ -теории. Тем не менее оказывается полезным сделать следующее предположение о спине кварков и антикварков, выходящее за рамки $SU(3)$ -теории:

IV. Кваркам и антикваркам приписывается спин $1/2$. Каждый из них может входить в элементарную частицу со значением проекции спина J_3 , равным $-1/2$ или $+1/2$.

Тогда проекция спина частицы равна сумме соответствующих значений J_3 для составляющих ее кварков и антикварков.

Отсюда следует, что максимальное значение спина частицы, состоящей из r кварков и s антикварков, не больше $(r + s)/2$ и что этот спин отличается от числа $(r + s)/2$ на целое число.

При нечетном $r + s$ получаются частицы с полуцелым спином — фермионы, а при четном $r + s$ — частицы с целым спином, т. е. бозоны.

Значение этого предположения состоит в том, что оно дает возможность отождествить полученные выше из кварков и антикварков супермультиплеты с известными супермультиплетами частиц, характеризуемыми величиной спина.

В описанном выше декуплете из трех кварков можно брать эти кварки в произвольных спиновых состояниях, т. е. с любыми значениями J_3 ; при этом частицы декуплета могут иметь значения J_3 от $-3/2$ до $+3/2$, и им следует приписать спин $3/2$. Поэтому составленный из трех кварков декуплет можно отождествить с декуплетом $F_{3/2}$ (таблица 10.3 из § 10.2, А). Сокращая записи кваркового состава и пользуясь аддитивностью заряда и гиперзаряда, легко найти кварковый состав декуплета $F_{3/2}$ из сопоставления следующих таблиц:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \Omega^- & & & & \lambda\lambda\lambda \\
 & & \Xi_8^- & \Xi_8^0 & & n\lambda\lambda & p\lambda\lambda \\
 \Sigma_8^- & & \Sigma_8^0 & \Sigma_8^+ & & n n \lambda & p n \lambda & p p \lambda \\
 \Delta_8^- & \Delta_8^0 & \Delta_8^+ & \Delta_8^{++} & n n n & p n n & p p n & p p p \\
 & & & & & & & (12.2.8)
 \end{array}$$

Точно так же, описанный выше октет, состоящий из трех кварков, можно сопоставить с октетом барионов $F_{1/2}$, если два кварка брать в одном спиновом состоянии и один — в противоположном:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \Xi^- & \Xi^0 & & n\lambda\lambda & p\lambda\lambda \\
 \Sigma^- & \left(\begin{array}{c} \Sigma^0 \\ \Lambda \end{array} \right) & \Sigma^+ & & n n \lambda & \left(\begin{array}{c} p n \lambda \\ p n \lambda \end{array} \right) & p p \lambda \\
 & N^0 & N^+ & & p n n & p p n & \\
 & & & & & & (12.2.9)
 \end{array}$$

Для каждой частицы, даже с определенным значением J_3 , здесь возможны различные записи: например, Σ^- с проекцией спина $+1/2$ можно записать в виде $\hat{n}\hat{n}\hat{\lambda}$ (оба n в состоянии $J_3 = 1/2$, λ в состоянии $J_3 = -1/2$), или в виде $\hat{n}\hat{p}\hat{\lambda}$, или, наконец, в виде $\hat{p}\hat{n}\hat{\lambda}$. Синглет (12.2.4) со спином $1/2$ ($\hat{p}\hat{n}\hat{\lambda}$ и т. д.) есть частица Λ ($Q = Y = 0$, $m = 1115$). Поскольку спин не является объектом $SU(3)$ -теории, эта теория не дает возможности указать векторы кварковых состояний частиц с учетом спина, и предыдущие записи со значками \wedge , \vee неоднозначны.

Аналогично для октета мезонов со спином 0 получаем таблицы кваркового состава:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \kappa^- & & \tilde{\kappa}^0 & & \lambda\bar{p} & & \lambda\bar{n} \\
 & & & & & & \\
 \pi^- & \begin{pmatrix} \pi^0 \\ \eta \end{pmatrix} & \pi^+ & & p\bar{p} & \begin{pmatrix} p\bar{p} \\ n\bar{n} \\ \lambda\bar{\lambda} \end{pmatrix} & p\bar{n} \quad (12.2.10) \\
 & & & & & & \\
 \kappa^0 & & \kappa^+ & & n\bar{\lambda} & & p\bar{\lambda}
 \end{array}$$

В этих случаях кварк и антикварк должны быть взяты в противоположных спиновых состояниях ($\hat{\lambda}\hat{p}$ или $\hat{\lambda}\hat{p}$, причем $SU(3)$ -теория опять не дает однозначной записи).

Заметим в заключение, что мы выбрали T -базис в качестве основы для определения кваркового состава частиц. Мы увидим ниже, что более адекватное определение частиц с помощью формулы масс приводит к векторам состояний, не всегда принадлежащим T -базису. Соответствующие поправки в нашем изложении не учитывались.

§ 12.3. Кварковый состав супермультиплетов

Все супермультиплеты из r кварков и s антикварков находятся с помощью разложения на неприводимые представления произведения r векторных и s ковекторных представлений. Следующая таблица (12.3.1) содержит некоторые результаты этого рода. В левом столбце скобка (r, s) означает число r кварков и s антикварков. Спра-

ва обозначены (числом частиц) все возможные супермультиплеты, которые могут состоять из r кварков и s антикварков. Спин такого супермультиплета может быть равен

$$\frac{r+s}{2}, \quad \frac{r+s}{2} - 1, \quad \frac{r+s}{2} - 2, \dots$$

Прочерк означает, что частиц кваркового состава (r, s) не существует, так как они имели бы дробные значения заряда и гиперзаряда. Переход от (r, s) к (s, r) приводит к супермультиплету из античастиц.

$(1,0), (0,1)$	—	} (12.3.1)
$(1,1)$	8, 1 (мезоны)	
$(2,1), (1,2)$	—	
$(3,0), (0,3)$	10, 8, 1 (барионы)	
$(4,0), (0,4)$	—	
$(3,1), (1,3)$	—	
$(2,2)$	27, 10, 8, 1 (мезоны)	
$(5,0), (0,5)$	—	
$(4,1), (1,4)$	35, 27, 10, 8, 1 (барионы)	
$(3,2), (2,3)$	—	
$(6,0), (0,6)$	35, 28, 27, 10, 8, 1 (мезоны)	
$(5,1), (1,5)$	—	
$(4,2), (2,4)$	—	
$(3,3)$	64, 35, 27, 10, 8, 1 (мезоны)	

Можно предположить, что неустойчивость частиц быстро возрастает с усложнением их кваркового состава. В настоящее время известны фермионы со спином $11/2$, состоящие не менее чем из 11 кварков или антикварков, и бозоны со спином 2, состоящие не менее чем из четырех кварков или антикварков.

§ 12.4. Заключительные замечания о кварках

Гипотеза кварков пока не привела ни к каким новым физическим результатам (по сравнению с $SU(3)$ -теорией без кварков). Формулы кваркового состава являются лишь перефразировкой на «кварковый» язык результатов теории представлений группы $SU(3)$. Таблица (12.3.1) показывает, что по данному супермультиплету (в смысле тео-

рии представлений, т. е. заданному, например, степенью представления) нельзя ни определить спин его частиц, ни даже указать, состоит ли он из фермионов или бозонов. Представление о кварках не вносит в этот вопрос ничего нового. Поэтому предположение о том, что частицы состоят из кварков, может показаться довольно бесплодным. Лишь обнаружение кварков в природе может придать этой гипотезе такую же убедительность, какую имеет, например, представление о составе атомных ядер из протонов и нейтронов.

Однако введение *спина* в теорию унитарной симметрии является насущной необходимостью: надо объяснить возможные значения спина из групповых соображений, аналогично тому как $SU(3)$ -теория объясняет возможные значения заряда и гиперзаряда частиц.

Для этого естественно включить $SU(3)$ в более обширную группу (ср. с изложением основных идей унитарной симметрии в § 9.1).

В алгебре Ли такой группы могли бы найти свое место оператор спина, собственные значения которого давали бы значения спина частиц, и операторы, меняющие спиновое состояние частиц (превращающие, например, \hat{p} в p , или наоборот).

Подобно тому как $SU(3)$ -теория объединяет зарядовые мультиплеты с разными значениями гиперзарядов в более обширные семейства — супермультиплеты, можно думать, что пространства неприводимых представлений большей группы позволят объединить в более обширные семейства супермультиплеты с разными значениями спина.

Расширение группы $SU(3)$ было начато в 1964 г. Гюрши и Радикати [3] и Пайсом [9]. Теория группы $SU(6)$ привела к важным физическим результатам, одним из которых является объяснение отношения магнитных моментов протона и нейтрона. Обсуждением возникшей при этом теории симметрии мы займемся, начиная со следующей главы.

ГРУППА $SU(6)$ И ЕЕ ПОДГРУППЫ§ 13.1. Мотивировка введения группы $SU(6)$

Состояние адрона описывается в $SU(3)$ -теории вектором некоторого комплексного евклидова пространства, на котором действует группа $SU(3)$. Выделяя неприводимые представления $SU(3)$, мы получаем подпространства, соответствующие супермультиплетам. Векторы такого подпространства изображают состояния супермультиплета с различными значениями «унитарного спина», т. е. различными значениями Q, Y . Изменение унитарного спина производится с помощью «унитарных вращений», т. е. операторов $SU(3)$ в данном представлении.

$SU(3)$ -теория позволяет найти заряды и гиперзаряды частиц, составляющих супермультиплет, а также его мультиплетный состав. Это дает возможность отождествить предсказываемые $SU(3)$ -теорией частицы с частицами, наблюдаемыми на опыте, как это и было сделано в главе 9, на примере октета и декуплета барионов. При этом *оказывается* (но не вытекает из теории), что все частицы супермультиплета имеют один и тот же спин, хотя разным супермультиплетам и могут отвечать одинаковые значения спина.

Значение спина частицы, таким образом, не может быть получено из $SU(3)$ -теории, но все же, по-видимому, каким-то образом связано с этой теорией. Попытаемся установить, в чем может заключаться эта связь. Как мы видели в главе 7, частицы имеют, кроме «унитарных степеней свободы», еще и «спиновые степени свободы»; точнее говоря, на пространстве состояний адрона, кроме группы $SU(3)$, должна действовать еще и «спиновая группа»

$SU(2)$. Эту группу, операторы которой J_k связаны с *обычным* спином частицы, ни в коем случае не следует смешивать с группой изотопического спина, которая также изоморфна $SU(2)$, но является подгруппой $SU(3)$. Операторы обычного спина J_+ , J_- меняют значение проекции спина J_3 , между тем как операторы изоспина T_+ , T_- «переставляют» частицы мультиплетта, меняя проекцию изоспина T_3 .

Чтобы выяснить отношение операторов обычного спина J_k к операторам унитарного спина F (представляющим группу $SU(3)$), рассмотрим, например, в пространстве состояний адрона восьмимерное подпространство октета барионов $F_{1/2}$. Спин каждой частицы октета равен $1/2$, но этим еще не определяется ее спиновое состояние: необходимо еще задать *проекцию спина* J_3 , которая может быть равна $-1/2$ или $+1/2$.

Состояния частицы с различными значениями проекции спина должны изображаться, по общим принципам квантовой механики, собственными векторами оператора J_3 , принадлежащими, соответственно, собственным значениям $-1/2$, $+1/2$. Таким образом, каждой частице октета должны отвечать *два* вектора в пространстве состояний адрона. Естественно предположить, что в этом пространстве расположено два экземпляра восьмимерного пространства $F_{-1/2}$, $F_{+1/2}$, в каждом из которых действует неприводимое представление $SU(3)$, причем $F_{-1/2}$ является собственным подпространством оператора J_3 , принадлежащим собственному значению $-1/2$, а $F_{+1/2}$ — собственному значению $+1/2$. Так как операторы J_+ , J_- должны изменять *только* проекцию спина, то для каждой пары спиновых состояний одной и той же частицы октета $\Psi_{-1/2}$, $\Psi_{1/2}$ должно быть:

$$J_+ \Psi_{-1/2} = \Psi_{1/2}, \quad J_- \Psi_{1/2} = \Psi_{-1/2}.$$

Если F — оператор унитарного спина, то в двух экземплярах пространства октета имеем:

$$F \Psi_{-1/2} = X_{-1/2}, \quad F \Psi_{1/2} = X_{1/2},$$

где $X_{-1/2}$, $X_{1/2}$ — спиновые состояния одной и той же частицы. Так как, кроме того,

$$J_3 F \Psi_{\pm 1/2} = \pm \frac{1}{2} X_{\pm 1/2} = F J_3 \Psi_{\pm 1/2},$$

то для всех векторов октета $\Psi_{\pm 1/2}$, имеем:

$$FJ_k\Psi = J_kF\Psi \quad (k = 1, 2, 3). \quad (13.1.1)$$

Те же рассуждения применимы к любому супермультиплету, и, следовательно, (13.1.1) верно для любого состояния адрона, представляющего суперпозицию «чистых» по отношению к F -спину состояний. Итак, операторы F -спина и J -спина, определенные на пространстве состояний адрона, должны быть перестановочны.

Можно предположить, что операторы F , J_k возникают из представлений одной и той же группы, содержащей в качестве подгрупп $SU(3)$ и группу обычного спина $SU(2)_J$. Так как их представляющие операторы должны быть перестановочны, надо построить эту группу таким образом, чтобы и в самой группе операторы $SU(3)$ коммутировали с операторами $SU(2)_J$. Далее, естественно искать эту группу среди групп $SU(n)$.

Простейший способ построить искомую группу с двумя заданными подгруппами состоит в следующем.

Рассмотрим тензорное произведение комплексных евклидовых пространств $C(2) \otimes C(3)$ (§ 2.3). На $C(2)$ действует группа $SU(2)_J$, на $C(3)$ — группа $SU(3)$, в силу самого определения этих групп (ср. § 4.2 (g)).

Для любой пары операторов $U(2)$ из $SU(2)_J$ и $U(3)$ из $SU(3)$ можно определить тензорные произведения $U(2) \otimes \epsilon(3)$, $\epsilon(2) \otimes U(3)$, действующие на $C(2) \otimes C(3)$ (см. § 2.4):

$$\left. \begin{aligned} (U(2) \otimes \epsilon(3)) (x \otimes y) &= U(2)x \otimes y, \\ (\epsilon(2) \otimes U(3)) (x \otimes y) &= x \otimes U(3)y. \end{aligned} \right\} \quad (13.1.2)$$

Ясно, что эти операторы перестановочны:

$$\begin{aligned} (U(2) \otimes \epsilon(3)) (\epsilon(2) \otimes U(3)) (x \otimes y) &= U(2)x \otimes U(3)y = \\ &= (\epsilon(2) \otimes U(3)) (U(2) \otimes \epsilon(3)) (x \otimes y). \end{aligned} \quad (13.1.3)$$

В искомой группе должны содержаться все произведения таких операторов, т. е. операторы вида

$$U(2) \otimes U(3). \quad (13.1.4)$$

Пространство $C(2) \otimes C(3)$ шестимерно (изоморфно $C(6)$), а произведения (13.1.4) — унитарные унимодулярные операторы в $C(6)$. Легко проверить, что операторы вида (13.1.4) образуют группу; именно, произведение операторов $U(2) \otimes U(3)$, $V(2) \otimes V(3)$ есть оператор того же вида $U(2)V(2) \otimes U(3)V(3)$, а обратный оператор для (13.1.4) имеет вид $[U(2)]^{-1} \otimes [U(3)]^{-1}$. Обозначим эту группу через $SU(2) \otimes SU(3)$; она является подгруппой $SU(6)$ — группы *всех* унитарных унимодулярных операторов в $C(6)$. При этом $SU(2)_J \otimes SU(3)$ действует в $C(6)$ неприводимым образом, т. е. в $C(6)$ нет инвариантного по отношению к этой группе подпространства меньшей размерности; в самом деле, операторы (13.1.4) переводят фиксированный вектор $x_0 \otimes y_0$ пространства $C(6)$ во всевозможные векторы $x \otimes y$.

Простейшее предположение состоит в том, чтобы за искомую группу $SU(n)$, содержащую все операторы (13.1.4), принять $SU(6)$, отождествив ее подгруппы $\epsilon(2) \otimes SU(3)$, $SU(2)_J \otimes \epsilon(3)$ с группами унитарного и обычного спина.

Геометрический смысл подгруппы $\epsilon(2) \otimes SU(3)$, $SU(2)_J \otimes \epsilon(2)$. Фиксируем в $C(6) = C(2) \otimes C(3)$ две ортогональные трехмерные плоскости $f_1 \otimes C(3)$, $f_2 \otimes C(3)$, где f_1, f_2 — два ортогональных друг другу нормированных вектора из $C(2)$. Тогда каждый вектор $C(6)$ можно разложить в сумму $f_1 \otimes e' + f_2 \otimes e''$.

Операторы $U_F = \epsilon(2) \otimes U(3)$ действуют на оба слагаемых совершенно одинаково, осуществляя «унитарное вращение» в обеих плоскостях одновременно; при этом каждая из плоскостей остается инвариантной:

$$U_F(f_1 \otimes e') = f_1 \otimes U(3)e', \quad U(f_2 \otimes e'') = f_2 \otimes U(3)e''. \quad (13.1.5)$$

Операторы $U_J = U(2) \otimes \epsilon(3)$ действуют на f_1, f_2 :

$$U_J(f_1 \otimes e') = U(2)f_1 \otimes e', \quad U(f_2 \otimes e'') = U(2)f_2 \otimes e''. \quad (13.1.6)$$

Это можно истолковать как одновременное вращение обеих трехмерных плоскостей в $C(6)$, при котором плоскости остаются ортогональными.

§ 13.2. Алгебра Ли $ASU(6)$.

Спин, момент и гипермомент

Операторы Окубо. Как мы видели (§§ 4.6, 4.5 (d)), алгебра Ли группы $SU(6)$ состоит из всех бесследных эрмитовых шестирядных матриц; образующие этой алгебры, которую мы обозначили через $ASU(6)$, суть матрицы Окубо (4.5.3). Будем обозначать шестирядные матрицы Окубо через $\mathbf{A}_B^A, \mathbf{A}_D^C, \dots$, с прописными латинскими индексами. Для трехрядных и двухрядных матриц Окубо сохраним обозначения главы 9: $A_b^a, A_d^c, \dots, a_\beta^\alpha, a_\delta^\gamma, \dots$, но теперь выберем в качестве индексов трехрядных матриц малые латинские, а для двухрядных — малые греческие буквы.

Согласно (4.5.3),

$$\mathbf{A}_B^A = \mathbf{B}_B^A - \frac{1}{6} \delta_B^A \epsilon(6), \quad (i | B_B^A | k) = \delta_k^A \delta_B^i. \quad (13.2.1)$$

Поскольку пространство $C(6)$, где действуют операторы $SU(6)$, есть тензорное произведение $C(2) \otimes C(3)$, каждый вектор из $C(6)$ представляется в виде $\sum x_j \otimes y_j$, где x_j принадлежат $C(2)$, а y_j — $C(3)$. Выберем ортонормированные базисы: f_1, f_2 в $C(2)$, e_1, e_2, e_3 в $C(3)$; тогда шесть векторов $f_\alpha \otimes e_a$ ($\alpha = 1, 2, a = 1, 2, 3$) представляют ортонормированный базис в $C(6)$ (ср. § 2.3). В дальнейшем мы будем пользоваться только этим базисом, векторы которого мы занумеруем также прописными латинскими индексами:

$$g_A = f_\alpha \otimes e_a. \quad (13.2.2)$$

Здесь A выражается через α и a по таблице

A	α	a
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	2	1
5	2	2
6	2	3

$$A = a + 3(\alpha - 1). \quad (13.2.3)$$

Аналогично мы будем записывать компоненты векторов $C(6)$ и элементы шестирядных матриц с двойными индексами, заменяя прописные латинские индексы A, B, \dots парами $\alpha a, \beta b, \dots$; например, действие шестирядной матрицы на вектор записывается в виде

$$z'^{\alpha a} = U_{\beta b}^{\alpha a} z^{\beta b}. \quad (13.2.4)$$

Применим это правило нумерации к шестирядным матрицам \mathbf{V}_B^A . Каждая такая матрица имеет один элемент, равный единице (на пересечении A -го столбца и B -й строки),

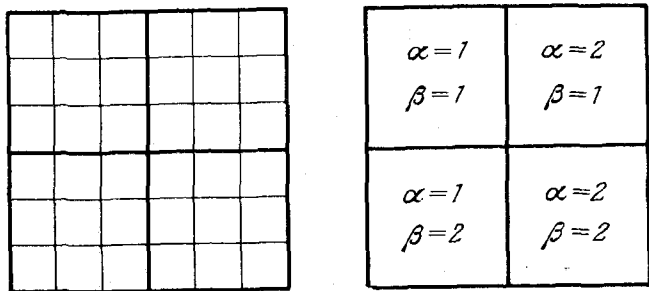


Рис. 3.

все же остальные равны нулю. В двухиндексной нумерации $\mathbf{V}_{\beta b}^{\alpha a}$ есть матрица, единичный элемент которой помещается следующим образом. Квадратное поле из 6×6 клеток делится на четыре равные части (рис. 3), нумеруемые парами греческих индексов α, β . Пара индексов α, β нумерует девять мест квадрата, соответствующего индексам α, β . Таким образом, матрица $\mathbf{V}_{\beta b}^{\alpha a}$ содержит единицу на пересечении a -го столбца и b -й строки трехрядного квадрата, стоящего в схеме рис. 3 на пересечении α -го столбца и β -й строки.

По определению тензорного произведения матриц (2.4.2),

$$\mathbf{V}_{\beta b}^{\alpha a} = b_{\beta}^{\alpha} \otimes B_b^a, \quad (13.2.5)$$

где b_β^α , B_b^a суть двухрядные, соответственно, трехрядные матрицы (4.5.1).

В силу (13.2.1) матрицы Окубо группы $SU(6)$ имеют вид

$$\mathbf{A}_{\beta\beta}^{\alpha\alpha} = a_\beta^\alpha \otimes A_b^a + \frac{1}{2} \delta_\beta^\alpha \epsilon(2) \otimes A_b^a + \frac{1}{3} a_\beta^\alpha \otimes \delta_b^a \epsilon(3). \quad (13.2.6)$$

Выпишем, например, недиагональную матрицу \mathbf{A}_{23}^{12} и диагональную \mathbf{A}_{23}^{23} :

$$\mathbf{A}_{23}^{12} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$\mathbf{A}_{23}^{23} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{array} \right]. \quad (13.2.7)$$

Мы видим, что недиагональная матрица $\mathbf{A}_{\beta\beta}^{\alpha\alpha}$ ($\alpha \neq \beta$ или $a \neq b$) содержит единицу на месте $\beta\beta^\alpha\alpha$, остальные же ее элементы равны нулю; диагональная матрица $\mathbf{A}_{\alpha\alpha}^{\alpha\alpha}$ содержит $5/6$ на месте $\alpha\alpha$, $-1/6$ на местах $\beta\beta$ ($\beta \neq \alpha$ или $b \neq a$) и нули на остальных.

Запишем еще в двухиндексных обозначениях перестановочные соотношения (4.5.7):

$$[\mathbf{A}_{\beta\beta}^{\alpha\alpha}, \mathbf{A}_{\delta\delta}^{\gamma\gamma}] = \delta_\delta^\alpha \delta_d^a \mathbf{A}_{\beta\beta}^{\gamma\gamma} - \delta_\beta^\gamma \delta_b^c \mathbf{A}_{\delta\delta}^{\alpha\alpha}. \quad (13.2.8)$$

Напомним, что сумма диагональных матриц Окубо равна нулю (ср. (4.5.4)):

$$\mathbf{A}_C^c = \mathbf{A}_{yc}^{yc} = 0. \quad (13.2.9)$$

Таким образом, алгебра Ли группы $SU(6)$ имеет $6 \cdot 6 - 1 = 35$ линейно независимых образующих; эти образующие (эрмитовы бесследные матрицы) могут быть получены из матриц Окубо по формуле (4.5.10). Имея это в виду, мы будем для простоты называть сами матрицы Окубо образующими $ASU(6)$.

С помощью схемы, изображенной на рис. 3, удобно описываются подгруппы $\epsilon(2) \otimes SU(3)$, $SU(2)_J \otimes \epsilon(3)$. Операторы первой из этих подгрупп изображаются в выбранном базисе $C(6)$ матрицами вида

$$U_F = \left[\begin{array}{c|c} U(3) & 0 \\ \hline 0 & U(3) \end{array} \right], \quad (13.2.10)$$

где $U(3)$ принадлежит $SU(3)$. Операторы второй подгруппы изображаются матрицами вида

$$U_J = \left[\begin{array}{c|c} u_1^1 \epsilon(3) & u_2^1 \epsilon(3) \\ \hline u_1^2 \epsilon(3) & u_2^2 \epsilon(3) \end{array} \right], \quad (13.2.11)$$

где (u_j^i) принадлежит $SU(2)$.

Очевидно, операторы U_F , U_J перестановочны.

Подалгебры Ли. Найдем теперь подалгебры Ли, соответствующие подгруппам группы $SU(6)$. Для подгруппы $\epsilon(2) \otimes SU(3)$, в силу (13.2.10), подалгебра Ли состоит из матриц

$$A_F = \left[\begin{array}{c|c} V(3) & 0 \\ \hline 0 & V(3) \end{array} \right], \quad (13.2.12)$$

где $V(3)$ — бесследная эрмитова трехрядная матрица.

Матрицы $\mathbf{B}_{\gamma b}^{\gamma a}$ имеют как раз вид (13.2.12), и их можно заменить бесследными, как в (4.5.3):

$$(A_F)_b^a = \mathbf{B}_{\gamma b}^{\gamma a} - \frac{1}{3} \delta_b^a \mathbf{B}_{\gamma c}^{\gamma c}. \quad (13.2.13)$$

В силу (13.2.1), (13.2.9), A_F можно выразить через шестирядные матрицы Окубо, а также, с помощью (13.2.6), через трехрядные:

$$(A_F)_b^a = \mathbf{A}_{\gamma b}^{\gamma a} = \epsilon(2) \otimes A_b^a. \quad (13.2.14)$$

Эрмитовы образующие можно построить из (13.2.14) по формуле (4.5.10). Мы будем называть (13.2.14) *операторами F-спина*.

Для подгруппы $SU(2)_J \otimes \epsilon(3)$, в силу (13.2.11), подалгебра Ли состоит из матриц

$$A_J = \left[\begin{array}{c|c} v_1^1 \epsilon(3) & v_2^1 \epsilon(3) \\ \hline v_1^2 \epsilon(3) & v_2^2 \epsilon(3) \end{array} \right], \quad (13.2.15)$$

где (v_j^i) — бесследная эрмитова двухрядная матрица.

Такой вид имеют матрицы $\mathbf{B}_{\beta c}^{\alpha c}$, из которых получаются бесследные матрицы (ср. (4.5.3)):

$$(A_J)_{\beta}^{\alpha} = \mathbf{B}_{\beta c}^{\alpha c} - \frac{1}{2} \mathbf{B}_{\gamma c}^{\gamma c}. \quad (13.2.16)$$

Отсюда (см. (13.2.1), (13.2.9), (13.2.6))

$$(A_J)_{\beta}^{\alpha} = \mathbf{A}_{\beta c}^{\alpha c} = a_{\beta}^{\alpha} \otimes \epsilon(3). \quad (13.2.17)$$

Мы будем называть (13.2.17) *операторами J-спина*.

Полная система наблюдаемых. Из (13.2.8) видно, что диагональные матрицы Окубо перестановочны друг с другом:

$$[\mathbf{A}_{\alpha a}^{\alpha a}, \mathbf{A}_{\beta b}^{\beta b}] = 0 \quad (\text{н. с.}); \quad (13.2.18)$$

здесь, как и раньше, (н. с.) означает, что в формуле не производится суммирование по повторяющимся индексам.

В силу (13.2.9) алгебра Ли $ASU(6)$ содержит пять линейно независимых перестановочных друг с другом операторов. Можно показать, что не существует большего числа операторов, обладающих этими свойствами; таким образом, ранг алгебры $ASU(6)$ равен пяти (ср. § 9.2). Любая система из пяти перестановочных операторов этой алгебры может быть заменой базиса приведена одновременно к диагональному виду; так как диагональные матрицы Окубо составляют базис диагональных бесследных матриц, то можно разложить по ним диагонализированные операторы.

Таким образом, любые пять операторов $\mathbf{A}_{\alpha\alpha}^{\alpha\alpha}$ (н. с.) можно рассматривать как полную систему наблюдаемых группы $SU(6)$ (ср. § 9.2). Любые пять независимых линейных комбинаций этих операторов можно также рассматривать как полную систему наблюдаемых. Чтобы выделить комбинации, имеющие физический смысл, фиксируем в $SU(6)$ подгруппу $\epsilon(2) \otimes SU(3)$ и тем самым установим связь с $SU(3)$ -теорией. Тогда естественно искать основные наблюдаемые группы $SU(6)$ в соответствующей подалгебре Ли, т. е. среди операторов F -спина (13.2.14); каким из этих последних следует приписать физический смысл, уже обсуждалось в $SU(3)$ -теории (ср. § 9.4).

Далее, подгруппа $SU(2)_J \otimes \epsilon(3)$ связана, как мы видели, с обычным спином; естественно поэтому искать основные наблюдаемые и среди операторов J -спина (13.2.17).

Исходя из этих соображений, перейдем к построению полной системы наблюдаемых. Как мы увидим, в описанных подалгебрах удастся найти только три независимые комбинации диагональных операторов Окубо (определяемые ниже операторы Q, Y, J_3). Две недостающие наблюдаемые (μ_3, ν_3) вводятся, исходя из дополнительных физических соображений; они оказываются, однако, также связанными с $SU(3)$ -теорией, так как строятся с помощью Q, Y .

Операторы заряда Q и гиперзаряда Y принимают в $SU(6)$ -теории вид (ср. (9.4.1.), (9.4.2))

$$Q = \epsilon(2) \otimes A_1^1, \quad Y = \epsilon(2) \otimes (-A_3^3). \quad (13.2.19)$$

Пользуясь определением тензорного произведения матриц, имеем:

$$Q = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2/3 & & & & & \\ & -1/3 & & & & \\ & & -1/3 & & & \\ \hline & & & 2/3 & & \\ & & & & -1/3 & \\ & & & & & -1/3 \end{array} \right], \quad (13.2.20)$$

$$Y = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1/3 & & & & & \\ & 1/3 & & & & \\ & & -2/3 & & & \\ \hline & & & 1/3 & & \\ & & & & 1/3 & \\ & & & & & -2/3 \end{array} \right],$$

где не выписанные элементы равны нулю. Отсюда имеем (в одноиндексном и двухиндексном обозначениях):

$$Q = \mathbf{A}_1^1 + \mathbf{A}_4^4 = \mathbf{A}_{11}^{11} + \mathbf{A}_{21}^{21},$$

$$Y = -(\mathbf{A}_3^3 + \mathbf{A}_6^6) = -(\mathbf{A}_{13}^{13} + \mathbf{A}_{23}^{23}). \quad (13.2.21)$$

Это — операторы F -спина (13.2.14).

Далее, операторы изоспина принимают вид (ср. (9.2.5), (9.2.1))

$$\left. \begin{aligned} T_3 &= \epsilon(2) \otimes \left(A_1^1 + \frac{1}{2} A_3^3 \right), \\ T_+ &= \epsilon(2) \otimes A_1^2, \\ T_- &= \epsilon(2) \otimes A_2^1, \end{aligned} \right\} \quad (13.2.22)$$

или

$$T_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1/2 & & & & & \\ & -1/2 & & & & \\ & & 0 & & & \\ \hline & & & 1/2 & & \\ & & & & -1/2 & \\ & & & & & 0 \end{array} \right],$$

$$T_+ = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 1 \end{array} \right], \quad T_- = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 1 \end{array} \right], \quad (13.2.23)$$

откуда (ср. (9.2.5))

$$\left. \begin{aligned} T_3 &= \frac{1}{2} (\mathbf{A}_1^1 + \mathbf{A}_4^4 - \mathbf{A}_2^2 - \mathbf{A}_5^5) = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{A}_{11}^{11} + \mathbf{A}_{21}^{21} - \mathbf{A}_{12}^{12} - \mathbf{A}_{22}^{22}), \\ T_+ &= \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_4^5 = \mathbf{A}_{11}^{12} + \mathbf{A}_{21}^{22}, \\ T_- &= \mathbf{A}_2^1 + \mathbf{A}_5^4 = \mathbf{A}_{12}^{11} + \mathbf{A}_{22}^{21}, \\ T_{\bar{b}}^{\bar{a}} &= \mathbf{A}_{\bar{\gamma}\bar{b}}^{\bar{\gamma}\bar{a}} - \frac{1}{2} \delta_{\bar{b}}^{\bar{a}} \mathbf{A}_{\bar{\gamma}\bar{c}}^{\bar{\gamma}\bar{c}} \quad (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = 1, 2). \end{aligned} \right\} \quad (13.2.24)$$

Операторы (13.2.24) также являются операторами *F*-спина (13.2.14). Подгруппу группы $\epsilon(2) \otimes SU(3)$, порожденную операторами $\epsilon(2) \otimes T_k$ ($k = 1, 2, 3$), мы назовем *подгруппой изоспина* и обозначим через $SU(2)_T$.

Операторы обычного спина (*J*-спина) составляют подгруппу $SU(2)_J \otimes \epsilon(3)$ группы $SU(6)$; в частности, оператор проекции спина

$$J_3 = a_1^1 \otimes \epsilon(3), \quad (13.2.25)$$

$$J_3 = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ & 1 \\ \hline & -1 \\ & -1 \\ & -1 \end{array} \right], \quad (13.2.26)$$

откуда

$$J_3 = \mathbf{A}_1^1 + \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_3^3 = \mathbf{A}_{11}^{11} + \mathbf{A}_{12}^{12} + \mathbf{A}_{13}^{13}. \quad (13.2.27)$$

Аналогично :

$$J_+ = a_1^2 \otimes \epsilon(3), \quad J_- = a_2^1 \otimes \epsilon(3), \quad (13.2.28)$$

или

$$J_+ = \begin{bmatrix} & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}, \quad J_- = \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (13.2.29)$$

откуда

$$\begin{aligned} J_+ &= \mathbf{A}_1^4 + \mathbf{A}_2^5 + \mathbf{A}_3^6 = \mathbf{A}_{11}^{21} + \mathbf{A}_{12}^{22} + \mathbf{A}_{13}^{23}, \\ J_- &= \mathbf{A}_4^1 + \mathbf{A}_5^2 + \mathbf{A}_6^3 = \mathbf{A}_{21}^{11} + \mathbf{A}_{22}^{12} + \mathbf{A}_{23}^{13}. \end{aligned} \quad (13.2.30)$$

J_k — операторы J -спина типа (13.2.17).

Из построенных выше операторов Q, Y, J_3 являются эрмитовыми и представляют независимые линейные комбинации диагональных операторов Окубо. Чтобы получить полную систему наблюдаемых группы $SU(6)$, надо добавить еще два оператора, перестановочных с Q, Y, J_3 . В качестве таких операторов можно взять

$$\left. \begin{aligned} \mu_3 &= a_1^1 \otimes A_1^1 = (a_1^1 \otimes \epsilon(3)) \cdot (\epsilon(2) \otimes A_1^1) = J_3 \cdot Q, \\ \nu_3 &= -a_1^1 \otimes A_3^3 = (a_1^1 \otimes \epsilon(3)) \cdot (\epsilon(2) \otimes (-A_3^3)) = J_3 \cdot Y. \end{aligned} \right\} \quad (13.2.31)$$

Чтобы выяснить физический смысл этих операторов, рассмотрим сначала упрощенную схему описания адронов, в которой пространство состояний адрона есть тензорное произведение $C_J \otimes C_F$ пространства «спиновых состояний» C_J на пространство «унитарных состояний» C_F (ср. введение обычного спина в (7.1.4)). В этой схеме операторы, представляющие $SU(2)_J$, действуют в C_J , а операторы, представляющие $SU(3)$, — в C_F .

Вектор состояния $x \otimes y$, «чистый» по обычному и унитарному спину; т. е. такой, что $J_3 x = j_3 x$, $Qy = qy$, при-

надлежит собственному значению $j_3 q$ оператора $J_3 \otimes Q$; число $j_3 q$ естественно считать «спиновым магнитным моментом» частицы, соответствующей вектору состояния адрона $x \otimes y$.

Разумеется, описанная схема слишком примитивна и не годится для описания адронов; систематика адронов в действительности получается из анализа представлений группы $SU(6)$. Представления соответствующей алгебры Ли $ASU(6)$ не сохраняют произведения операторов (а сохраняют коммутаторы, см. (4.7.1)); поэтому для *представляющих* операторов равенство $\mu_3 = J_3 \cdot Q$ уже не будет верно. Иначе говоря, в произвольном представлении группы $SU(6)$ (одновременно задающем представление ее алгебры Ли) будут определены эрмитовы операторы, представляющие μ_3 , J_3 и Q , но первый из них не будет, вообще говоря, произведением двух других, за исключением фундаментального представления. Тем не менее наша схема грубо отражает первоначальные соображения, из которых мы исходили в § 13.1 при мотивировке группы симметрии $SU(6)$; поэтому мы примем μ_3 , заданный формулой (13.2.31), за *оператор магнитного момента адрона*.

Теперь нетрудно истолковать и оператор ν_3 . В самом деле, в $SU(3)$ -теории операторы Q и Y равноправны; все различия между зарядом и гиперзарядом обнаруживаются в экспериментах, не описываемых $SU(3)$ -теорией. В силу такого формального равноправия Q и Y в нашей теории, наряду с магнитным моментом $\mu_3 = J_3 \cdot Q$ мы должны ввести в рассмотрение *гипермомент* $\nu_3 = J_3 \cdot Y$, связанный с гиперзарядом так же, как магнитный момент с зарядом.

Таким образом, ν_3 рассматривается как *оператор гипермомента адрона*.

В силу (13.2.10), (13.2.26)

$$\mu_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1/3 & & & & & \\ & -1/6 & & & & \\ & & -1/6 & & & \\ \hline & & & -1/3 & & \\ & & & & 1/6 & \\ & & & & & 1/6 \end{array} \right]$$

$$v_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1/6 & & & & & \\ & 1/6 & & & & \\ & & -1/3 & & & \\ \hline & & & -1/6 & & \\ & & & & -1/6 & \\ & & & & & 1/3 \end{array} \right], \quad (13.2.32)$$

откуда

$$\begin{aligned} \mu_3 &= \frac{1}{2} (\mathbf{A}_1^1 - \mathbf{A}_4^4) - \frac{1}{3} J_3 = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{A}_{11}^{11} - \mathbf{A}_{21}^{21}) - \frac{1}{3} J_3, \\ v_3 &= \frac{1}{2} (\mathbf{A}_6^6 - \mathbf{A}_3^3) + \frac{1}{3} J_3 = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{A}_{23}^{23} - \mathbf{A}_{13}^{13}) + \frac{1}{3} J_3. \end{aligned} \quad (13.2.33)$$

Заметим, что операторы (13.2.33) не принадлежат описанным выше подалгебрам $ASU(6)$. Нетрудно проверить, что операторы Q, Y, J_3, μ_3, v_3 линейно независимы, поскольку (13.2.9) есть единственное линейное соотношение между диагональными матрицами Окубо. Мы нашли, следовательно, полную систему наблюдаемых группы $SU(6)$, и дали им физическое истолкование.

Из приведенных выше рассуждений видно, что полная система наблюдаемых группы $SU(6)$ должна быть сконструирована из диагональных матриц Окубо; однако конкретный выбор пяти независимых линейных комбинаций этих матриц не определяется еще строением самой группы $SU(6)$. В действительности мы исходили выше из более сложной структуры, состоящей из группы $SU(6)$ с двумя фиксированными перестановочными между собой подгруппами, изоморфными $SU(3)$ и $SU(2)$.

Как мы увидим в следующем параграфе, можно прийти к другому набору наблюдаемых $SU(6)$, если фиксировать в этой группе другие подгруппы, оставив в стороне связь с $SU(3)$ -теорией, приведшую нас первоначально к введению группы $SU(6)$.

§ 13.3. Вигнеров спин.

Странный и нестранный спин

Содержание этого параграфа (и других, посвященных подгруппе $SU(4)$ и $SU(4)$ -редукции) может быть опущено читателем, заинтересованным лишь в систематике адронов; оно не потребуется также для вывода массовой формулы $SU(3)$ -теории.

Однако подгруппа $SU(4)$ важна для понимания массовой формулы $SU(6)$ -теории и так называемого смешения частиц (mixing).

Подгруппа Вигнера $SU(4)$. Среди подгрупп группы $SU(6)$, прежде всего, заслуживают внимания подгруппы, изоморфные $SU(n)$, $2 \leq n \leq 5$. $SU(2)$ и $SU(3)$ уже встречались в предыдущих рассмотрениях. $SU(5)$ до сих пор не играла никакой роли в физике. Подгруппа, изоморфная $SU(4)$, оказалась, напротив, весьма важной, так как приводит к новому принципу классификации адронов и новым наблюдаемым группы $SU(6)$. Группа $SU(4)$ была впервые введена в физику Вигнером еще в 1937 г. в связи с некоторыми вопросами ядерной физики [11]; это был один из первых примеров использования в физике «нетрадиционной» группы Ли (отличной от $SO(3)$ или группы Лорэнца).

Подчеркнем, что *все рассуждения, связанные с подгруппой Вигнера, не имеют отношения к $SU(3)$ -теории.* Группа $SU(6)$ возникла в нашем изложении (в соответствии с историей предмета) в результате «расширения группы $SU(3)$ присоединением J -спина». Однако это происхождение $SU(6)$ можно забыть, рассматривая $SU(6)$ как фундаментальную группу симметрии, заданную a priori. Тогда можно поставить вопрос о целесообразном выборе подгруппы, с помощью которой неприводимые представления $SU(6)$ разлагаются на мультиплеты. Соответствующий выбор подгруппы в $SU(3)$ уже подробно обсуждался выше (§ 9.6). В случае группы $SU(3)$ выбор подгрупп был невелик, так как из всех $SU(n)$ подходила лишь $SU(2)$; различные расположения в группе $SU(3)$ подгруппы, изоморфной $SU(2)$, привели к трем типам изоспина. Мы видели, что подгруппа T -спина приводит к правильному (согласному с естественной классификацией по бли-

зости масс) разбиению супермультиплетов на мультиплеты. В случае группы $SU(6)$ есть гораздо больше возможностей выбора подгруппы. Выбор подгруппы $\epsilon(2) \otimes SU(3)$, изоморфной $SU(3)$ и вполне определенным образом расположенной в $SU(6)$, как мы увидим, приводит к весьма удовлетворительной классификации адронов. Однако при объяснении масс адронов возникает трудность для некоторых частиц (φ - и ω -мезонов). Это явление можно объяснить с помощью другой классификации, связанной с другим выбором подгруппы; именно, подгруппа, изоморфная $SU(4)$, имеет, по-видимому, глубокий физический смысл, выяснение которого является делом будущего.

Если мы выбираем в качестве основной подгруппы $SU(4)$, это означает полный разрыв с $SU(3)$ -теорией. Теория, возникающая при этом, не только приводит к новому разбиению на мультиплеты неприводимых представлений группы $SU(6)$, но и приводит к *новому понятию элементарной частицы*. В самом деле, набор наблюдаемых, описанный в § 13.2, должен быть теперь заменен новым (ср. замечание в конце § 13.2), соответствующим другому выбору подгруппы. Как мы увидим, возникающие при этом изменения гораздо значительнее, чем в случае различного выбора типа изоспина.

Проекция спина J_3 из основной наблюдаемой превратится в производную, а именно, сумму проекций так называемых странного и нестранного спина $S_3 + N_3$. Но тогда собственный вектор оператора J_3 может не быть собственным вектором S_3 и N_3 , так что соответствующее состояние адрона не будет чистым по отношению к новым основным наблюдаемым S_3 и N_3 . Поскольку самое понятие частицы определяется как состояние адрона с определенными значениями основных наблюдаемых (ср. § 9.5), при переходе к подгруппе $SU(4)$ надо ввести новые элементарные частицы, векторы состояний которых суть линейные комбинации векторов состояний старых.

Чтобы избежать всякого смешения понятий, мы будем последовательно применять термины « $SU(3)$ -частица» и « $SU(4)$ -частица».

Расположение подгруппы Вигнера в $SU(6)$. Чтобы облегчить сравнение $SU(3)$ -теории с $SU(4)$ -теорией, мы сохраним в $C(6)$ выбор базиса, сделанный в § 13.2, а также

все обозначения этого параграфа. По построению § 13.1, $C(6) = C(2) \otimes C(3)$. Выберем в $C(3)$ плоскость $C(2)_T$, натянутую на векторы e_1, e_2 ; тогда $C(4) = C(2) \otimes C(2)_T$ есть четырехмерное подпространство $C(6)$. В этом подпространстве действует группа $SU(4)$, по самому определению этой группы.

Каждый оператор $U(4)$ из $SU(4)$ может рассматриваться как оператор из $SU(6)$ вследствие правила

$$U(6)(x + y) = U(4)x + y, \quad (13.3.1)$$

где $x + y$ есть разложение произвольного вектора $C(6)$ на компоненту x , лежащую в $C(4)$, и компоненту y , ортогональную $C(4)$.

Таким образом, $SU(4)$ есть подгруппа $SU(6)$; это и есть подгруппа Вигнера. Матрицы этой подгруппы имеют вид

$$U_W = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \boxed{U_1^1(2)} & 0 & \boxed{U_1^2(2)} & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \boxed{U_2^1(2)} & 0 & \boxed{U_2^2(2)} & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}, \quad (13.3.2)$$

где

$$U(4) = \left[\begin{array}{c|c} U_1^1(2) & U_1^2(2) \\ \hline U_2^1(2) & U_2^2(2) \end{array} \right] \quad (13.3.3)$$

— унитарная унимодулярная матрица.

Мы видим, что расположение подгруппы $SU(4)$ в $SU(6)$ совершенно отлично от расположения подгруппы $SU(3)$, описанного в § 13.2; это расположение вполне аналогично расположению в $SU(3)$ подгруппы изоспина $SU(2)_T$, где роль инвариантной плоскости играет $C(2)$.

Как мы уже говорили, $SU(4)$, как и $SU(3)$, служит для описания мультиплетов; эти « W -мультиплеты» заменяют супермультиплеты $SU(3)$ -теории. Дальнейшая классификация получается, если заметить, что операторы $\epsilon(2) \otimes SU(2)_T$, составляющие подгруппу изотопического спина, все имеют вид (13.3.2).

Соответствующие матрицы (13.3.3) имеют вид

$$U_T = \left[\begin{array}{c|c} U(2) & 0 \\ \hline 0 & U(2) \end{array} \right], \quad (13.3.4)$$

где $U(2)$ — двухрядная унитарная унимодулярная матрица.

Расположение подгруппы $\epsilon(2) \otimes SU(2)_T$ в $SU(4)$ напоминает расположение $\epsilon(2) \otimes SU(3)$ в $SU(6)$ (§ 13.2). Это наводит на мысль ввести еще одну подгруппу $SU(4)$, играющую такую же роль, как подгруппа обычного спина $SU(2)_J \otimes \epsilon(3)$ в § 13.2.

Подгруппа нестранного спина. Так как пространство $C(4)$, описанное выше, может быть представлено в виде $C(2) \otimes C(2)_T$, можно рассмотреть, наряду с $\epsilon(2) \otimes SU(2)_T$, подгруппу $SU(2)_J \otimes \epsilon(2)$ группы $SU(4)$. Матрицы (13.3.3) этой подгруппы имеют вид (ср. (13.2.11))

$$U_N = \left[\begin{array}{c|c} u_1^1 \epsilon(2) & u_2^1 \epsilon(2) \\ \hline u_1^2 \epsilon(2) & u_2^2 \epsilon(2) \end{array} \right], \quad (13.3.5)$$

где (u_j^i) принадлежит $SU(2)$.

Соответствующие шестирядные матрицы имеют, конечно, вид (13.3.2) и потому совершенно отличны от матриц J -спина (13.2.11).

$SU(2)_J \otimes \epsilon(2)$ называется подгруппой *нестранного спина*, или N -спина; обозначим, для краткости, подгруппы T -спина и N -спина через $SU(2)_T$, $SU(2)_N$. Как мы видим, группа $SU(4)$ с подгруппами $SU(2)_T$, $SU(2)_N$ составляет структуру, совершенно аналогичную группе $SU(6)$ с подгруппами $SU(3)$, $SU(2)_J$. Ниже мы воспользуемся этой аналогией для построения набора наблюдаемых $SU(4)$ -теории.

Подгруппа странного спина. Как было уже отмечено, расположение $SU(4)$ в $SU(6)$ напоминает расположение $SU(2)_T$ в $SU(3)$. Но в $C(6)$ остается еще двумерная плоскость, ортогональная $C(4)$, что позволяет определить еще одну подгруппу, изоморфную $SU(2)$. Эта плоскость $C(2)_S$ натянута на векторы $f_1 \otimes e_3$, $f_2 \otimes e_3$ построенного в § 13.2 базиса. Операторы $SU(2)$, действующие в $C(6)$ по правилу

$$U(6)(x + y) = x + U(2)y, \quad (13.3.6)$$

где x принадлежит $C(4)$, а $y - C(2)_S$, составляют подгруппу *странного спина*, или S -спина, группы $SU(6)$. Матрицы этой подгруппы имеют вид

$$U_S = \begin{pmatrix} \overline{\epsilon(2)} & 0 & 0 & \overline{0} \\ & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & u_1^1 & 0 & 0 & u_2^1 \\ & & 0 & & & 0 \\ 0 & & 0 & \epsilon(2) & & 0 \\ & & & & & 0 \\ 0 & 0 & \overline{u_1^2} & 0 & 0 & \overline{u_2^2} \end{pmatrix}, \quad (13.3.7)$$

где (u_j^i) принадлежит $SU(2)$. Мы обозначим подгруппу странного спина через $SU(2)_S$.

Перестановочность подгрупп. Из геометрического смысла определенных выше подгрупп ясно, что подгруппы $SU(2)_T$, $SU(2)_N$, $SU(2)_S$ перестановочны друг с другом, а также $SU(4)$ перестановочна с $SU(2)_S$:

$$[U_T, U_N] = [U_T, U_S] = [U_N, U_S] = [U_W, U_S] = 0. \quad (13.3.8)$$

Эти соотношения легко проверить также по виду соответствующих матриц.

Подалгебры Ли. Найдем теперь операторы алгебры Ли $ASU(6)$, соответствующие введенным выше подгруппам.

Из (13.3.2) видно, что подалгебра Ли, соответствующая подгруппе $SU(4)$, состоит из операторов вида

$$\begin{pmatrix} \overline{V_1^1(2)} & 0 & \overline{V_1^2(2)} & 0 \\ & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \\ \overline{V_2^1(2)} & 0 & \overline{V_2^2(2)} & 0 \\ & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13.3.9)$$

где

$$\left[\begin{array}{c|c} V_1^1(2) & V_1^2(2) \\ \hline V_2^1(2) & V_2^2(2) \end{array} \right] \quad (13.3.10)$$

— бесследная эрмитова матрица. Такие матрицы являются линейными комбинациями матриц $\mathbf{B}_{\beta\bar{b}}^{\alpha\bar{a}}$ с $a, b = 1, 2$. Условимся обозначать значения индексов a, b , равные 1, 2, через \bar{a}, \bar{b} , а пары $\alpha\bar{a}, \beta\bar{b}, \dots$ — через \bar{A}, \bar{B}, \dots ($\bar{A}, \bar{B}, \dots = 1, 2, 4, 5$). Тогда матрицы W -спина A_W являются бесследными линейными комбинациями $\mathbf{B}_{\beta\bar{b}}^{\alpha\bar{a}}$. Согласно (4.5.3) такими комбинациями являются матрицы (13.3.9), в которых вместо (13.3.10) следует подставить четырехрядные матрицы Окубо (эрмитовость обеспечивается, как в (4.5.10)):

$$\left. \begin{aligned} (A_W)_{\beta\bar{b}}^{\alpha\bar{a}} &= \mathbf{B}_{\beta\bar{b}}^{\alpha\bar{a}} - \frac{1}{4} \delta_{\beta}^{\alpha} \delta_{\bar{b}}^{\bar{a}} \mathbf{B}_{\gamma\bar{c}}^{\gamma\bar{c}}, \\ (A_W)_{\bar{B}}^{\bar{A}} &= \mathbf{B}_{\bar{B}}^{\bar{A}} - \frac{1}{4} \delta_{\bar{B}}^{\bar{A}} \mathbf{B}_{\bar{C}}^{\bar{C}}. \end{aligned} \right\} \quad (13.3.11)$$

В силу (13.2.1), A_W можно выразить через шестирядные матрицы Окубо:

$$\left. \begin{aligned} (A_W)_{\beta\bar{b}}^{\alpha\bar{a}} &= \mathbf{A}_{\beta\bar{b}}^{\alpha\bar{a}} - \frac{1}{4} \delta_{\beta}^{\alpha} \delta_{\bar{b}}^{\bar{a}} \mathbf{A}_{\gamma\bar{c}}^{\gamma\bar{c}}, \\ (A_W)_{\bar{B}}^{\bar{A}} &= \mathbf{A}_{\bar{B}}^{\bar{A}} - \frac{1}{4} \delta_{\bar{B}}^{\bar{A}} \mathbf{A}_{\bar{C}}^{\bar{C}}. \end{aligned} \right\} \quad (13.3.12)$$

Легко видеть, что

$$(A_W)_{\gamma\bar{c}}^{\gamma\bar{c}} = 0, \quad (A_W)_{\bar{C}}^{\bar{C}} = 0. \quad (13.3.13)$$

Из (13.3.4) видно, что, в частности, матрицы T -спина получают прежнее выражение (13.2.24):

$$(A_T)_{\bar{b}}^{\bar{a}} = \mathbf{A}_{\gamma\bar{b}}^{\gamma\bar{a}} - \frac{1}{2} \delta_{\bar{b}}^{\bar{a}} \mathbf{A}_{\gamma\bar{c}}^{\gamma\bar{c}}. \quad (13.3.14)$$

Легко видеть, что

$$(A_T)_{\bar{c}}^{\bar{c}} = 0. \quad (13.3.15)$$

Перейдем к подгруппе нестраничного спина. Из (13.3.5) ясно, что матрицы соответствующей подалгебры Ли имеют

ВИД

$$A_N = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \boxed{v_1^1 \epsilon(2)} & 0 & \boxed{v_2^1 \epsilon(2)} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \boxed{v_1^2 \epsilon(2)} & 0 & \boxed{v_2^2 \epsilon(2)} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}, \quad (13.3.16)$$

где (v_j^i) принадлежит $ASU(2)$, т. е. является бесследной эрмитовой двухрядной матрицей. Чтобы выразить такие матрицы через шестирядные матрицы Окубо, заметим, что матрицы $\mathbf{V}_{\beta\bar{c}}^{\alpha\bar{c}}$ имеют как раз вид (13.3.16) с обычной оговоркой относительно эрмитовости.

Переходя к бесследным матрицам (ср. (4.5.3)), имеем

$$(A_N)_{\beta}^{\alpha} = \mathbf{V}_{\beta\bar{c}}^{\alpha\bar{c}} - \frac{1}{2} \delta_{\beta}^{\alpha} \mathbf{V}_{\gamma\bar{c}}^{\gamma\bar{c}}. \quad (13.3.17)$$

В силу (13.2.1), (13.2.9) это равносильно

$$(A_N)_{\beta}^{\alpha} = \mathbf{A}_{\beta\bar{c}}^{\alpha\bar{c}} + \frac{1}{2} \delta_{\beta}^{\alpha} \mathbf{A}_{\gamma\bar{c}}^{\gamma\bar{c}}. \quad (13.3.18)$$

Подгруппе странного спина, в силу (13.3.7), соответствует подалгебра Ли, состоящая из матриц

$$A_S = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{v_1^1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{v_1^2} & 0 \\ \hline \end{array}. \quad (13.3.19)$$

где (v_j^i) — бесследная эрмитова двухрядная матрица.

Такой вид имеют матрицы $\mathbf{V}_{\beta\bar{3}}^{\alpha\bar{3}}$, из которых обычным образом изготавливаются бесследные:

$$(A_S)_{\beta}^{\alpha} = \mathbf{V}_{\beta\bar{3}}^{\alpha\bar{3}} - \frac{1}{2} \delta_{\beta}^{\alpha} \mathbf{V}_{\gamma\bar{3}}^{\gamma\bar{3}}. \quad (13.3.20)$$

Переходя к матрицам Окубо, имеем:

$$(A_S)_{\beta}^{\alpha} = \mathbf{A}_{\beta 3}^{\alpha 3} - \frac{1}{2} \delta_{\beta}^{\alpha} \mathbf{A}_{\gamma 3}^{\gamma 3}. \quad (13.3.21)$$

Операторы нестраниного спина N_3 , N_+ , N_- и странного спина S_3 , S_+ , S_- строятся из (13.3.18), (13.3.21) так же, как в случае J -спина:

$$\left. \begin{aligned} N_3 &= \frac{1}{2} (\mathbf{A}_1^1 + \mathbf{A}_2^2 - \mathbf{A}_4^4 - \mathbf{A}_5^5), \\ N_+ &= \mathbf{A}_1^4 + \mathbf{A}_2^5, \quad N_- = \mathbf{A}_4^1 + \mathbf{A}_5^2, \\ S_3 &= \frac{1}{2} (\mathbf{A}_3^3 - \mathbf{A}_6^6), \quad S_+ = \mathbf{A}_3^6, \quad S_- = \mathbf{A}_6^3. \end{aligned} \right\} \quad (13.3.22)$$

Заметим в заключение, что на подпространстве $C(4)$ операторы J -спина (13.2.17) совпадают с операторами N -спина (13.3.18).

Полная система наблюдаемых. Переходя к построению наблюдаемых $SU(6)$ -теории, мы будем, как и в § 13.2, прежде всего искать их в подалгебрах Ли, соответствующих характерным для этой теории подгруппам. Естественно, мы постараемся сохранить, по возможности, уже найденные имеющие физический смысл операторы.

Таким оператором является проекция изоспина

$$T_3 = \frac{1}{2} (\mathbf{A}_1^1 + \mathbf{A}_4^4 - \mathbf{A}_2^2 - \mathbf{A}_5^5),$$

(см. (13.2.24)), совпадающая с $(A_T)_1^1$ (ср. (13.3.14)).

Оператор T_3 не играл в $SU(3)$ -теории роли основной наблюдаемой, так как выражается через Q и Y ($T_3 = Q - \frac{1}{2}Y$). В $SU(4)$ -теории этот оператор, напротив, следует считать основной наблюдаемой, между тем как Q и Y , не входящие ни в одну из подалгебр § 13.3, не должны играть такой роли в $SU(4)$ -теории. Мы видим, что при последовательном построении $SU(4)$ -теории заряд и гиперзаряд теряют свою роль основных наблюдаемых. Точно так же в $SU(4)$ -теории не является основной наблюдаемой проекция обычного спина J_3 .

В качестве основных наблюдаемых $SU(4)$ -теории мы должны ввести операторы типа A_N, A_S , линейно выражающиеся через диагональные операторы Окубо. Такими операторами являются

$$N_3 = \frac{1}{2} (\mathbf{A}_1^1 + \mathbf{A}_2^2 - \mathbf{A}_4^4 - \mathbf{A}_5^5), \quad (13.3.23)$$

$$S_3 = \frac{1}{2} (\mathbf{A}_3^3 - \mathbf{A}_6^6), \quad (13.3.24)$$

называемые, соответственно, *проекцией нестрannого спина и проекцией странного спина*.

Заметим, что проекция обычного спина выражается через N_3 и S_3 и, таким образом, является «производной» наблюдаемой $SU(4)$ -теории:

$$J_3 = N_3 + S_3. \quad (13.3.25)$$

Мы исчерпали линейные комбинации диагональных матриц Окубо, принадлежащие подалгебрам A_T, A_N, A_S .

Две недостающие наблюдаемые теперь естественно ввести по аналогии с (13.2.31):

$$\mu_{N_3} = N_3 T_3, \quad \mu_{S_3} = S_3 T_3. \quad (13.3.26)$$

Эти операторы можно было бы назвать нестранным и странным моментами. Впрочем, из всех введенных выше моментов лишь магнитный момент μ_3 имеет в настоящее время экспериментальное истолкование.

Заключительное замечание. Подгруппы, которые были введены в предыдущем изложении, располагаются в содержащих их группах двумя существенно разными способами, как это уже было отмечено в начале § 13.3.

Первый из этих способов описан на примерах вложения $SU(3)$ в $SU(6)$ и $SU(2)_T$ в $SU(4)$; второй — на примерах вложения $SU(4)$ в $SU(6)$ и $SU(2)_T$ в $SU(3)$.

Пользуясь этими терминами, можно коротко описать структуры подгрупп $SU(6)$, приводящие к $SU(3)$ - и $SU(4)$ -теории:

$SU(3)$ -теория: в $SU(6)$ вложена первым способом подгруппа $SU(3)$;

в $SU(3)$ вложена вторым способом подгруппа $SU(2)_T$.

$SU(4)$ -теория: в $SU(6)$ вложена вторым способом под-
группа $SU(4)$;
в $SU(4)$ вложена первым способом под-
группа $SU(2)_T$.

Подгруппа изоспина в обоих случаях является суще-
ственной частью построения.

В $SU(3)$ -теории есть два заряда (Q, Y) , один тип спина J_3 и два момента J_3Q, J_3Y .

В $SU(4)$ -теории есть один заряд (роль заряда играет T_3), два типа спина N_3, S_3 и два момента N_3T_3, S_3T_3 .

КЛАССИФИКАЦИЯ АДРОНОВ С ПОМОЩЬЮ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $SU(6)$

§ 14.1. Описание представлений группы $SU(6)$

Как мы знаем (§ 5.3), все неприводимые представления группы $SU(6)$ могут быть получены с помощью схем Юнга Y , насчитывающих не более пяти строк. После симметризаций P , соответствующих строкам, и антисимметризаций Q , соответствующих столбцам, мы получаем в качестве пространства неприводимого представления некоторое подпространство тензоров типа

$$T^L,$$

где

$$\begin{aligned} L = & \{ \alpha_1 \dots \alpha_{r_1} \} [\beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}] \dots [\beta_1^{(r_2)}, \beta_2^{(r_2)}] \times \\ & \times [\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \gamma_3^{(1)}] \dots [\gamma_1^{(r_3)}, \gamma_2^{(r_3)}, \gamma_3^{(r_3)}] \times \\ & \times [\delta_1^{(1)}, \delta_2^{(1)}, \delta_3^{(1)}, \delta_4^{(1)}] \dots [\delta_1^{(r_4)}, \delta_2^{(r_4)}, \delta_3^{(r_4)}, \delta_4^{(r_4)}] \times \\ & \times [\varepsilon_1^{(1)}, \varepsilon_2^{(1)}, \varepsilon_3^{(1)}, \varepsilon_4^{(1)}, \varepsilon_5^{(1)}] \dots [\varepsilon_1^{(r_5)}, \varepsilon_2^{(r_5)}, \varepsilon_3^{(r_5)}, \varepsilon_4^{(r_5)}, \varepsilon_5^{(r_5)}]. \end{aligned} \quad (14.1.1)$$

С помощью приема, описанного в (5.3.15), можно заменить здесь скобки из четырех и пяти индексов двухиндексными и одноиндексными скобками, расположенными снизу; условившись еще писать трехиндексные скобки посередине, мы будем вместо записи (14.1.1) пользоваться следующей:

$$T \left\{ \begin{array}{l} \{ \alpha_1 \dots \alpha_{r_1} \} [\beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}] \dots [\beta_1^{(r_2)}, \beta_2^{(r_2)}] \\ [\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \gamma_3^{(1)}] \dots [\gamma_1^{(r_3)}, \gamma_2^{(r_3)}, \gamma_3^{(r_3)}] \\ \{ \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{r_5} \} [\delta_1^{(1)}, \delta_2^{(1)}] \dots [\delta_1^{(r_4)}, \delta_2^{(r_4)}] \end{array} \right. \quad (14.1.2)$$

Тензоры этого типа, по определению, симметричны относительно индексов α и относительно индексов ε , антисимметричны относительно индексов, заключенных в любую из квадратных скобок и симметричны относительно перестановки скобок в одной и той же строке. Кроме того, между компонентами тензоров (14.1.2) существуют некоторые линейные соотношения, вытекающие из предварительных симметризаций **P**.

Полученное таким образом представление $SU(6)$ мы обозначаем (как и соответствующее пространство тензоров) через $\text{Sym } Y$.

Таким образом, неприводимое представление полностью определяется набором неотрицательных чисел $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$, задающим его схему Юнга: в схеме должно быть r_1 столбцов из одной клетки, r_2 столбцов из двух клеток, ..., r_5 столбцов из пяти клеток. Иногда мы будем использовать такие наборы прямо для обозначения представлений. Приведем некоторые простейшие представления $SU(6)$.

$(1, 0, 0, 0, 0)$. Схема Юнга для этого представления имеет вид

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}. \quad (14.1.3)$$

Пространство $\text{Sym } Y$ состоит из векторов, т. е. есть $C(6)$. Действие оператора $U(6)$ из $SU(6)$ на такой вектор есть унитарное вращение в $C(6)$; следовательно, мы получаем *фундаментальное представление* $SU(6)$. Матрицы алгебры Ли $ASU(6)$ представляются тождественно и имеют вид, описанный в § 13.2. Как мы увидим ниже, фундаментальное представление не имеет физического истолкования, по крайней мере при нынешнем состоянии теории. Все следующие ниже представления, напротив, играют роль в описании адронов.

$(1, 0, 0, 0, 1)$. Схема Юнга имеет вид

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}. \quad (14.1.4)$$

Пространство $\text{Sym } Y$ состоит из тензоров вида

$$T^{A[B_1, B_2, B_3, B_4, B_5]} \quad (14.1.5)$$

Следуя § 5.3, вводим тензоры

$$T_B^A = \epsilon_{BB_1B_2B_3B_4B_5} T^{A[B_1, B_2, B_3, B_4, B_5]} \quad (14.1.6)$$

и доказываем их бесследность:

$$T_C^C = 0. \quad (14.1.7)$$

Как было отмечено в § 5.3, это — единственное соотношение между компонентами T_B^A . Итак, представление задается бесследными тензорами вида (14.1.6). A, B пробегает значения $1, \dots, 6$; так как на компоненты тензоров наложено одно условие (14.1.7), размерность представления равна $6^2 - 1 = 35$. Согласно (5.3.12), мы получили *регулярное представление* группы $SU(6)$. Это представление позволяет описать большинство известных мезонов.

$(3, 0, 0, 0, 0)$. Схема Юнга имеет вид

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}. \quad (14.1.8)$$

Пространство $\text{Sym } Y$ состоит из тензоров вида

$$T^{\{ABC\}}, \quad (14.1.9)$$

симметрических по всем трем индексам. Так как в этом случае нет антисимметризаций \mathbf{Q} , никакие дополнительные соотношения, кроме этих, не накладываются.

Размерность представления получается из (3.6.11) при $n = 6, p = 3$; она равна 56. Это представление позволяет описать большинство известных барионов.

$(0, 0, 0, 0, 3)$. Схема Юнга имеет вид

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}. \quad (14.1.10)$$

Пространство $\text{Sym } Y$ состоит из тензоров вида

$$T^{\{ABC\}}, \quad (14.1.11)$$

антисимметричных относительно всех трех индексов. Так как в этом случае нет симметризаций \mathbf{P} , никакие дополнительные соотношения, кроме этих, не накладываются.

Размерность представления получается из (3.6.17) при $n = 6$, $p = 3$; она равна 20.

(1,1,0,0,0). Схема Юнга имеет вид

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}. \quad (14.1.12)$$

Пространство $\text{Sym } Y$ получается из тензоров T^{ABC} с помощью следующих операций: сначала симметризация по первым двум индексам, затем антисимметризация по второму и третьему. Имея в виду этот порядок операций, обозначим полученные тензоры символом

$$T^{(A[B)C]}. \quad (14.1.13)$$

Чтобы подсчитать размерность представления, рассмотрим сначала компоненты, у которых A, B, C все различны. Как легко убедиться, для заданных A, B, C имеются лишь соотношения вида $T^{XYZ} = -T^{YZX}$, где XYZ — произвольная перестановка из A, B, C .

Среди шести таких соотношений лишь четыре независимы; таким образом, для каждой тройки A, B, C получается две независимые компоненты. Всего таких троек $C_6^3 = 20$, так что всего есть 40 независимых компонент с различными индексами.

Каждому выбору пары чисел $A \neq B$ соответствуют две независимые компоненты T^{AAB}, T^{BBA} , в силу той же симметризации (14.1.13). Всего таких компонент $C_6^2 \cdot 2 = 30$. Наконец, при $A = B = C$ компонента равна нулю. Итак, размерность представления равна 70.

(0,1,0,1,0). Схема Юнга имеет вид

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}. \quad (14.1.14)$$

В (14.1.2) получается при этом одна скобка снизу и одна сверху, так что тензоры представления имеют вид

$$T_{[BD]}^{[AC]} \quad (14.1.15)$$

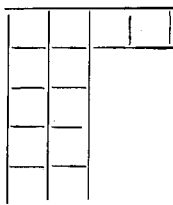
(антисимметричны по A, C , а также по B, D).

Симметризации \mathbf{P} приводят к тензору, в котором индексы β перестановочны с индексами δ (см. (14.1.1)). Отсюда, аналогично (14.1.7), получаются дополнительные соотношения для тензоров (14.1.15):

$$T_{AD}^{AC} = 0. \quad (14.1.16)$$

Число независимых компонент тензора (14.1.15) равно квадрату числа независимых компонент тензора $T^{[AC]}$, т. е. согласно (3.6.17), $(C_6^2)^2 = 225$. Соотношения (14.1.16) нумеруются упорядоченными парами (C, D) , число которых равно $6^2 = 36$. Следовательно, размерность представления равна $225 - 36 = 189$.

(2,0,0,0,2). Схема Юнга имеет вид



$$(14.1.17)$$

Тензоры представления, согласно (14.1.2), могут быть приведены к виду

$$T_{\{BD\}}^{\{AC\}} \quad (14.1.18)$$

(симметричны по A, C , а также по B, D).

Симметризация \mathbf{P} приводит к тензору, в котором индексы α перестановочны с индексами ε , что означает, как и выше,

$$T_{AD}^{AC} = 0. \quad (14.1.19)$$

Число независимых компонент тензора (14.1.18) равно квадрату числа независимых компонент тензора $T^{\{AC\}}$, т. е., согласно (3.6.11), $21^2 = 441$. Соотношения (14.1.19) нумеруются упорядоченными парами (C, D) , которых 36; следовательно, размерность представления $441 - 36 = 405$.

§ 14.2. Принципы $SU(6)$ -описания элементарных частиц

Теперь мы можем, по аналогии с § 9.5, перечислить принципы, лежащие в основе классификации элементарных частиц в $SU(6)$ -теории. Подчеркнем, что самое понятие элементарной частицы должно быть еще определено, и притом определено заново. Как мы увидим, $SU(6)$ -теория существует в двух вариантах, которые мы для краткости называем « $SU(3)$ -редукцией» и « $SU(4)$ -редукцией». В каждом из этих вариантов вводится свое понятие элементарной частицы, причем эти понятия не совпадают друг с другом. Понятие элементарной частицы в $SU(3)$ -редукции с точностью до спина совпадает с введенным в § 9.5.

Выбор между двумя вариантами $SU(6)$ -теории отнюдь не прост, поскольку эксперимент не дает в этом вопросе однозначного ответа. Каждый из вариантов, как мы увидим, описывает некоторые части «спектра адронов».

Первый из принципов $SU(6)$ -теории является повторением принципа I из § 9.5 и точно так же констатирует, что теория занимается лишь адронами:

I. *$SU(6)$ -теория описывает все адроны, и только адроны.*

Как мы увидим ниже, спин частицы получает объяснение в $SU(6)$ -теории (с помощью $SU(3)$ -редукции). Барийное число и четность не вытекают из $SU(6)$ -теории, хотя и связаны с ней некоторым «внешним» образом. Эта связь выражается вторым принципом:

II. *Адроны классифицируются в $SU(6)$ -теории на гипермультиплеты, каждый из которых состоит из частиц с одним и тем же барионным числом и одной и той же четностью. В частности, каждый гипермультиплет состоит либо только из барионов, либо только из мезонов; в первом случае в него входят либо только частицы, либо только античастицы, во втором — те и другие.*

Правила построения гипермультиплетов. Первое из этих правил позволяет получить все физически возможные гипермультиплеты.

III. *Каждый гипермультиплет соответствует некоторому неприводимому представлению группы $SU(6)$, причем*

число входящих в гипермультиплет частиц равно степени представления.

Это не значит, что *каждому* неприводимому представлению $SU(6)$ соответствует существующий в природе гипермультиплет. Как и в § 9.5, можно указать условия, «запрещающие» некоторые из представлений. Именно, операторы Y и Q , определенные в (13.2.21), в $SU(6)$ -теории также служат для вычисления гиперзаряда и заряда частиц: в пространстве каждого представления $SU(6)$ действуют два оператора, представляющих Y и Q , собственные значения которых трактуются как гиперзаряды и заряды частиц соответствующего гипермультиплета. Но тогда естественно рассматривать лишь те представления, для которых все значения гиперзаряда и заряда — целые.

IV. *Гипермультиплеты соответствуют лишь тем неприводимым представлениям $SU(6)$, для которых все собственные значения операторов Y , Q — целые.*

С этой точки зрения фундаментальное («кварковое») представление $SU(6)$ должно быть отброшено, поскольку для него собственные значения Y , Q равны $\pm 1/3$, $\pm 2/3$, (см. (13.2.20)).

Напротив, описанные в § 14.1 представления размерностей 20, 35, 56, 70, 189, 405 удовлетворяют принципу IV; из них особенно важны (и будут подробно изучены ниже) представления 35-плета и 56-плета.

Следует заметить, что число элементарных частиц, о котором здесь идет речь, подсчитывается несколько иначе, чем в традиционной трактовке частиц. Различные состояния проекции спина J_3 обычно приписываются одной и той же частице; между тем в $SU(6)$ -теории протон в состоянии $J_3 = -1/2$ и протон в состоянии $J_3 = +1/2$ считаются *разными частицами* 56-плета барионов, и т. п. Это замечание существенно для понимания приводимых ниже определений понятия элементарной частицы в $SU(3)$ -редукции и в $SU(4)$ -редукции.

V. *Каждому гипермультиплету соответствует пространство состояний — пространство $\text{Sum } Y$ неприводимого представления, описывающего этот гипермультиплет. Каждый вектор этого пространства истолковывается как состояние гипермультиплета.*

Правила разложения гипермультиплета. Мы должны теперь сделать следующий шаг, соответствующий разложению супермультиплета на изотопические мультиплеты в § 9.5. Руководствуясь этой аналогией, следует выбрать в $SU(6)$ подгруппу, играющую ту же роль, что подгруппа T -спина в $SU(3)$; представление $SU(6)$, задающее гипермультиплет, определяет, вообще говоря, приводимое представление этой подгруппы. Разложение этого представления на неприводимые представления должно привести к следующей ступени классификации адронов, входящих в гипермультиплет. Мы назовем этот процесс *редукцией* представления по выбранной подгруппе (ср. § 9.3).

Вопрос состоит в том, как выбрать подгруппу в $SU(6)$. Мы рассмотрим два способа выбора подгруппы, описанные в §§ 13.2 и 13.3.

А. $SU(3)$ -редукция

Фиксируем в $SU(6)$ подгруппу, изоморфную $SU(3)$, как это было сделано в § 13.2. Для краткости мы будем называть эту подгруппу просто $SU(3)$.

Вариант $SU(6)$ -теории, к которому приводит этот выбор, назовем $SU(6)/SU(3)$ -теорией.

Прежде чем приступить к редукции заданного представления $\text{Sum } Y$, примем во внимание оператор проекции спина J_3 , перестановочный со всеми операторами $ASU(3)$. Соответствующий представляющий оператор $J_3(N)$, который мы будем обозначать также через J_3 , есть эрмитов оператор, действующий на пространстве представления $\text{Sum } Y$. Пространство $\text{Sum } Y$ разлагается в ортогональную сумму собственных подпространств, принадлежащих различным собственным значениям J_3 .

Пусть C_{j_3} — одно из этих подпространств, со значением проекции спина j_3 . Так как операторы унитарного спина перестановочны с J_3 , C_{j_3} является инвариантным подпространством для подгруппы $SU(3)$.

Разлагая C_{j_3} на неприводимые подпространства при всех j_3 , мы приходим к специальной редукции заданного представления $\text{Sum } Y$ по подгруппе $SU(3)$, обладающей тем добавочным свойством, что каждое ее неприводимое подпространство является собственным для J_3 .

Поскольку в этой книге не развивается общий аппарат редукции представлений группы $SU(6)$ (ср. главу 11), мы не занимаемся здесь обсуждением вопроса, однозначно ли определяются этим требованием неприводимые подпространства редукции.

Как мы увидим, это верно для некоторых простейших гипермультиплетов.

Во всяком случае, любые две редукции связаны друг с другом унитарной эквивалентностью: это значит, что существует перестановочное с J_3 унитарное преобразование пространства $\text{Sum } Y$, переводящее инвариантные подпространства первой редукции в инвариантные подпространства второй. Таким образом, размерности этих подпространств и соответствующие им значения j_3 определяются однозначно.

Операторы J_+ , J_- также перестановочны с операторами F -спина и поэтому переводят каждое пространство C_{j_3} либо в $C_{j_3 \pm 1}$ (той же размерности), либо в нуль.

Предыдущие соображения приводят к следующему принципу классификации:

VI.A. *Каждый гипермультиплет разбивается в $SU(6)/SU(3)$ -теории на F -мультиплеты, которые строятся следующим образом. Неприводимое представление $\text{Sum } Y$, задающее гипермультиплет, индуцирует на подгруппе $SU(3)$ группы $SU(6)$ представление этой подгруппы в пространстве состояний гипермультиплета; это представление, вообще говоря приводимое, разлагается на неприводимые представления. Неприводимые подпространства этих представлений выбираются так, чтобы они были одновременно собственными подпространствами оператора проекции спина J_3 . Эти подпространства взаимно однозначно соответствуют F -мультиплетам, составляющим данный гипермультиплет, причем размерность подпространства равна числу элементарных частиц в F -мультиплете, а собственное значение j_3 есть проекция спина всех этих частиц.*

Каждый F -мультиплет определяется некоторым неприводимым представлением группы $SU(3)$, причем, в силу самого способа построения этого представления по заданному гипермультиплету, собственные значения операторов Q , Y в этом представлении целочисленны (ср. IV).

Поэтому каждый F -мультиплет можно отождествить с некоторым супермультиплетом $SU(3)$ -теории.

Точнее говоря, отношения между F -мультиплетами и супермультиплетами $SU(3)$ -теории можно описать следующим образом:

VII.A. Каждому F -мультиpletу, входящему в данный гипермультиплет, сопоставляется целое или полуцелое число j , называемое спином этого F -мультиплета. Существует последовательность из $(2j + 1)$ F -мультиплетов $C_{-j}, C_{j+1}, \dots, C_{j-1}, C_j$, содержащая данный F -мультиплет. Оператор J_+ (J_-) переводит C_{j_3} в C_{j_3+1} при $j_3 < j$ и в нуль при $j_3 = j$ (соответственно, C_{j_3} в C_{j_3-1} при $j_3 > -j$ и в нуль при $j_3 = -j$).

Описанной последовательности F -мультиплетов соответствует один, и только один, супермультиплет $SU(3)$ с тем же барионным числом, четностью и спином, и таким образом можно получить все супермультиплеты $SU(3)$.

Следует отметить, что этим правилом не вполне устраняются трудности, связанные с отождествлением F -мультиплетов и супермультиплетов. Так, различные гипермультиплеты могут содержать, например, октеты барионов с одинаковым спином и четностью. Принципы систематики адронов, излагаемые в этом параграфе, не устраняют такой неоднозначности, и в следующей главе отождествление F -мультиплетов будет содержать некоторый произвол. Однако, как мы увидим дальше, массовые формулы (глава 17) позволяют с уверенностью отнести супермультиплет $SU(3)$ к некоторому гипермультиpletу, если массы частиц супермультиплета удовлетворяют массовой формуле, составленной для соответствующего представления $SU(6)$.

Перейдем, наконец, к определению понятия элементарной частицы в $SU(6)/SU(3)$ -теории. Поскольку операторы J_+, J_- перестановочны с операторами F -спина Y, Q, T_+, T_- , каждый F -мультиплет C_{j_3} , описанный в VII.A ($j_3 = -j, \dots, j$), может быть разложен на элементарные частицы одним и тем же способом, описанным в § 9.5. Важно отметить, что при этом одной элементарной частице $SU(3)$ -теории со спином j соответствует $2j + 1$ элементарная частица $SU(6)/SU(3)$ -теории с различными значениями проекции спина j_3 .

Таким образом, то, что в традиционном изложении называлось «спиновым состоянием» элементарной частицы, в $SU(6)$ -теории интерпретируется как *отдельная элементарная частица*: «протон» не является элементарной частицей $SU(6)$ -теории, а вместо него появляются две элементарные частицы — «протон с проекцией спина $j_3 = -1/2$ » и «протон с проекцией спина $j_3 = +1/2$ ». Именно в этом смысле надо понимать принцип III, определяющий число частиц в гипермультиплете.

Теперь мы можем завершить перечень принципов $SU(6)/SU(3)$ -теории, определив понятие элементарной частицы в этой теории:

VIII.A. В силу установленного в VII, А соответствия между F -мультиплетами и супермультиплетами $SU(3)$ -теории, каждый F -мультиплет разбивается на изотопические мультиплеты (или T -мультиплеты), которым соответствуют неприводимые подпространства подгруппы $SU(2)_T$ группы $SU(6)$.

Точно так же, как в $SU(3)$ -теории, в каждом таком подпространстве выбирается ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов пары операторов Y, Q . Этим векторам взаимно однозначно соответствуют элементарные частицы $SU(6)/SU(3)$ -теории, рассматриваемые как состояния гипермультиплета.

Чтобы задать $SU(6)/SU(3)$ -частицу, надо указать прежде всего ее гипермультиплет, т. е. соответствующее представление группы $SU(6)$, затем F -мультиплет и, наконец, числа T, Y, Q (ср. § 11.2).

Заметим, что задания кратности F -мультиплета, спина j и проекции спина j_3 еще недостаточно, чтобы фиксировать F -мультиплет в данном гипермультиплете (например, 189-плет содержит два декуплета с одинаковыми значениями $j_3, j_3 = -1, 0, 1$; аналогично обстоит дело и с 405-плетом).

Из изложенных выше принципов могут быть получены иерархическая классификация адронов ($SU(6)$ -мультиплеты, F -мультиплеты, T -мультиплеты), число частиц в каждом мультиплете, значения их заряда, гиперзаряда, спина и проекции спина j_3 . В следующей главе эта процедура будет применена к наиболее важным гипермультиплетам.

Б. $SU(4)$ -редукция

Фиксируем в $SU(6)$ подгруппу, изоморфную $SU(4)$, как это было сделано в § 13.3. Для краткости мы будем называть эту подгруппу просто $SU(4)$. Вариант $SU(6)$ -теории, к которому приводит этот выбор, назовем $SU(6)/SU(4)$ -теорией.

В этой теории оператор проекции странного спина S_3 , перестановочный с подгруппой $SU(4)$ (см. (13.3.8)), играет роль, аналогичную роли J_3 в $SU(6)/SU(3)$. Оператор Y также перестановочен с $SU(4)$, как видно из (13.2.21), (13.3.12); наконец, в силу (13.3.22) Y перестановочен с S_3 . Из перечисленных перестановочных соотношений следует, что пространство представления $\text{Sum } Y$ разлагается в ортогональную сумму собственных подпространств пары операторов S_3, Y , инвариантных по отношению к подгруппе $SU(4)$. Соображения, аналогичные приведенным в § 14.2, А, приводят к следующему принципу:

VI.Б. *Каждый гипермультиплет разбивается в $SU(6)/SU(4)$ -теории на W -мультиплеты, которые строятся следующим образом. Неприводимое представление $\text{Sum } Y$, задающее гипермультиплет, индуцирует на подгруппе $SU(4)$ группы $SU(6)$ представление этой подгруппы в пространстве состояний гипермультиплета; это представление, вообще говоря приводимое, разлагается на неприводимые представления. Неприводимые подпространства этих представлений выбираются так, чтобы они были одновременно собственными подпространствами оператора проекции странного спина S_3 и оператора гиперзаряда Y . Эти подпространства взаимно однозначно соответствуют W -мультиплетам, составляющим данный гипермультиплет, причем размерность подпространства равна числу элементарных частиц в W -мультиплете, а собственное значение s_3 есть проекция странного спина всех этих частиц.*

Поскольку операторы странного спина S_+, S_- перестановочны с подгруппой $SU(4)$, мы приходим к принципу

VII.Б. *Каждому W -мультиплету, входящему в данный гипермультиплет, сопоставляется целое или полуцелое число s , называемое странным спином этого W -мультиплета. Существует последовательность из $2s + 1$ W -муль-*

триплетов $C_{-s}, C_{-s+1}, \dots, C_{s-1}, C_s$, содержащая данный W -мультиплет.

Оператор $S_+(S_-)$ переводит C_{s_3} в C_{s_3+1} при $s_3 < s$ и в нуль при $s_3 = s$ (соответственно, C_{s_3} в C_{s_3-1} при $s_3 > -s$ и в нуль при $s_3 = -s$).

Дальнейшая классификация получается, исходя из подгруппы изотопического спина $SU(2)_T$ группы $SU(4)$. Согласно (13.3.8) оператор проекции нестрannого спина N_3 перестановочен с операторами T -спина. Поэтому собственные подпространства N_3 инвариантны относительно подгруппы $SU(2)_T$. Разлагая полученные таким образом представления $SU(2)_T$ на неприводимые, мы приходим к изотопическому подразделению W -мультиплетов:

VIII.Б. Каждый W -мультиплет разбивается в $SU(6)/SU(4)$ -теории на изотопические мультиплеты (T -мультиплеты), которые строятся следующим образом. Неприводимое представление группы $SU(4)$, задающее W -мультиплет, согласно VI.Б, индуцирует на подгруппе $SU(2)_T$ представление этой подгруппы в пространстве состояний W -мультиплета; это представление, вообще говоря, приводимое, разлагается на неприводимые представления. Неприводимые подпространства этих представлений выбираются так, чтобы они были одновременно собственными подпространствами оператора проекции нестрannого спина N_3 . Эти подпространства взаимно однозначно соответствуют T -мультиплетам, составляющим данный W -мультиплет, причем размерность подпространства равна числу элементарных частиц T -мультиплета, а собственное значение N_3 есть проекция нестрannого спина всех этих частиц.

IX.Б. Каждому T -мультиплету, входящему в данный W -мультиплет, сопоставляется целое или полуцелое число n , называемое нестранным спином этого T -мультиплета.

Существует последовательность из $2n-1$ T -мультиплетов $C_{-n}, C_{-n+1}, \dots, C_{n-1}, C_n$, содержащая данный T -мультиплет. Оператор $N_+(N_-)$ переводит C_{n_3} в C_{n_3+1} при $n_3 < n$ и в нуль при $n_3 = n$ (соответственно C_{n_3} в C_{n_3-1} при $n_3 > -n$ и в нуль при $n_3 = -n$).

Теперь можно определить понятие элементарной частицы в $SU(6)/SU(4)$ -теории. Для этого можно, как и в

$SU(3)$ -варианте, воспользоваться алгеброй Ли $ASU(2)_T$, действующей в подпространствах T -мультиплетов:

Х.Б. В каждом неприводимом подпространстве подгруппы $SU(2)_T$, построенном согласно VIII.Б, выбирается ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора проекции изотопического спина T_3 . Этим векторам взаимно однозначно соответствуют элементарные частицы $SU(6)/SU(4)$ -теории, рассматриваемые как состояния гипермультиплета. Оператор T_+ (T_-) переводит вектор состояния с собственным значением T_3 в вектор состояния с собственным значением $T_3 + 1$ или в нуль (соответственно, в вектор состояния с собственным значением $T_3 - 1$ или в нуль).

Размерность подпространства равна $2T + 1$, где $T = \max T_3$, и называется изотопическим спином всех частиц, входящих в T -мультиплет.

Как мы уже говорили в конце главы 1, роль «заряда» в $SU(6)/SU(4)$ -теории играет оператор проекции изоспина T_3 , принадлежащий соответствующей подалгебре Ли. Оператор гиперзаряда Y , не принадлежащий никакой подалгебре $SU(4)$ -редукции, занимает в этой редукции место, ближе подходящее к операторам N_3 , S_3 нестранного и странного спинов. Так как Y принимает определенное (и постоянное) значение на каждом T -мультиплете, то $SU(6)/SU(4)$ -частицы, имеющие по принципу Х.Б. определенное значение T_3 , имеют также определенные значения Y и $Q = T_3 + \frac{1}{2}Y$. Этим способом можно в $SU(6)/SU(4)$ -теорию ввести гиперзаряд и заряд. Следует, однако, заметить, что формула $Q = T_3 + \frac{1}{2}Y$ принадлежит $SU(3)$ -теории и не имеет никакого отношения к подгруппе $SU(4)$.

По-видимому, понятия заряда и гиперзаряда частиц вообще не очень тесно связаны с $SU(4)$ -редукцией, а привлекаются лишь для сравнения с $SU(3)$ -редукцией. Инвариантные подпространства группы изоспина $SU(2)_T$ могут быть построены двумя способами, вытекающими из принципов $SU(6)/SU(3)$ -теории, соответственно, $SU(6)/SU(4)$ -теории; полученные подпространства T -мультиплетов в двух вариантах теории могут оказаться раз-

личными. В самом деле, редукция представления $\text{Sym } Y$ по подгруппе $SU(2)_T$ осуществляется в этих вариантах по-разному: в одном случае с дополнительным требованием постоянства J_3, Y на T -мультиплетах и с промежуточной редукцией по $SU(3)$, в другом случае — с требованием постоянства S_3, Y, N_3 и с промежуточной редукцией по $SU(4)$. Так как разложение на неприводимые представления индуцированного $\text{Sym } Y$ представления подгруппы $SU(2)_T$ определяется лишь с точностью до унитарной эквивалентности, полученные подпространства T -мультиплетов могут оказаться различными, что затрудняет сопоставление $SU(6)/SU(3)$ -частиц с $SU(6)/SU(4)$ -частицами. Самые понятия элементарной частицы в двух вариантах $SU(6)$ -теории в некоторых случаях расходятся, т. е. вектор состояния гипермультиплета, изображающий $SU(6)/SU(3)$ -частицу, может представлять линейную комбинацию векторов, изображающих $SU(6)/SU(4)$ -частицы, и наоборот. Это явление, с которым мы встретимся в следующей главе, носит название *смешения* частиц (*mixing*).

ПРИМЕРЫ ГИПЕРМУЛЬТИПЛЕТОВ

В этой главе изложенные выше принципы классификации будут применены к двум важнейшим семействам адронов — 35-плету мезонов и 56-плету барионов. Как мы увидим, в этих случаях можно однозначно указать векторы состояния отдельных элементарных частиц в обоих вариантах теории и сопоставить полученные таблицы.

В указанные два семейства (и в гипермультиплет антибарионов, устроенный так же, как 56-плет) входит большинство известных адронов. Для других гипермультиплетов известны лишь отдельные «кандидаты», которые могут в них войти. По этой причине мы не рассматриваем других гипермультиплетов, тогда как строение 35-плета и 56-плета описываем весьма подробно. Далее, мы не излагаем общей теории редукции представлений $SU(6)$, а ограничиваемся фактическим указанием редукции в интересующих нас случаях, что не представляет затруднений.

§ 15.1. 35-плет мезонов

Этот гипермультиплет задается регулярным представлением группы $SU(6)$ со схемой Юнга $(1,0,0,0,1)$ (см. (14.1.4)). Пространство 35-плета $\text{Sum } Y$ состоит из всех тензоров типа T_B^A , подчиненных условию бесследности $T_C^C = 0$ (14.1.7).

Согласно общему описанию регулярного представления (§ 5.3), $\text{Sum } Y$ индуцируется тензорным представлением $T(1, 1)$ на подпространстве бесследных тензоров. Базисные

тензоры пространства $T(1, 1)$ суть

$$\Psi_B^A \quad (A, B = 1, \dots, 6). \quad (15.1.1)$$

Эти тензоры ортонормированы в пространстве $T(1, 1)$:

$$(\Psi_B^A | \Psi_D^C) = \delta^{AC} \delta_{BD}. \quad (15.1.2)$$

Действие операторов Окубо на базисные тензоры описывается формулой (см. (5.3.28))

$$\mathbf{A}_B^A \Psi_D^C = \delta_D^A \Psi_B^C - \delta_B^C \Psi_D^A. \quad (15.1.3)$$

A. $SU(3)$ -редукция

Для Ψ_B^A можно ввести двухиндексное обозначение и записать их аналогично формуле (13.2.5):

$$\Psi_B^A = \Psi_{\beta b}^{\alpha a} = I_{\beta}^{\alpha} \otimes \Phi_b^a, \quad (15.1.4)$$

где I_{β}^{α} , Φ_b^a — базисные тензоры типа $T(1, 1)$ над пространством $C(2)$, соответственно $C(3)$.

Действие операторов Окубо на базисные тензоры (15.1.4) описывается формулой (ср. (15.1.3))

$$\mathbf{A}_{\beta b}^{\alpha a} \Psi_{\delta d}^{\gamma c} = \delta_{\delta}^{\alpha} \delta_d^{\gamma} \Psi_{\beta b}^{\gamma c} - \delta_{\beta}^{\gamma} \delta_b^c \Psi_{\delta d}^{\alpha a}. \quad (15.1.5)$$

Обозначим, для краткости, операторы F -спина в представлении 35-плета через F_b^a ; тогда, согласно (13.2.14),

$$F_b^a \Psi_{\delta d}^{\gamma c} = I_{\delta}^{\gamma} \otimes A_b^a \Phi_d^c = I_{\delta}^{\gamma} \otimes (\delta_d^a \Phi_b^c - \delta_b^c \Phi_d^a). \quad (15.1.6)$$

Аналогично, в силу (13.2.17),

$$J_{\beta}^{\alpha} \Psi_{\delta d}^{\gamma c} = a_{\beta}^{\alpha} I_{\delta}^{\gamma} \otimes \Phi_d^c = (\delta_{\delta}^{\alpha} I_{\beta}^{\gamma} - \delta_{\beta}^{\gamma} I_{\delta}^{\alpha}) \otimes \Phi_d^c. \quad (15.1.7)$$

В частности,

$$\left. \begin{aligned} Q \Psi_{\delta d}^{\gamma c} &= I_{\delta}^{\gamma} \otimes Q \Phi_d^c, \\ Y \Psi_{\delta d}^{\gamma c} &= I_1^{\gamma} \otimes Y \Phi_d^c, \\ J_3 \Psi_{\delta d}^{\gamma c} &= a_1 I_{\delta}^{\gamma} \otimes \Phi_d^c, \\ J_+ \Psi_{\delta d}^{\gamma c} &= a_1^2 I_{\delta}^{\gamma} \otimes \Phi_d^c, \\ J_- \Psi_{\delta d}^{\gamma c} &= a_2^1 I_{\delta}^{\gamma} \otimes \Phi_d^c, \end{aligned} \right\} \quad (15.1.8)$$

где Q, Y в правых частях — операторы заряда и гиперзаряда $SU(3)$ -теории.

Теперь нетрудно указать неприводимые подпространства для подгруппы $SU(3)$.

а) Октет со спином 0. Рассмотрим подпространство $T(1, 1)$, порожденное тензорами вида

$$P_b^a = I_Y^Y \otimes \Phi_b^a. \quad (15.1.9)$$

В силу (15.1.6) в этом подпространстве P определено представление группы $SU(3)$ типа $T(1, 1)$.

По правилам § 5.3 из этого представления строится неприводимое регулярное представление на подпространстве бесследных тензоров. Но условие бесследности тензора Φ влечет за собой бесследность тензора $I_Y^Y \otimes \Phi$; в самом деле, как вытекает из (2.4.2),

$$\text{Sp}(A \otimes B) = \text{Sp} A \cdot \text{Sp} B. \quad (15.1.10)$$

Таким образом, выбирая бесследные комбинации Φ_0 , как в § 9.3, мы получаем восьмимерное неприводимое подпространство $\text{Sum } Y$, состоящее из тензоров вида

$$P = I_Y^Y \otimes \Phi_0. \quad (15.1.11)$$

Из (15.1.8) видно, что P — собственное подпространство J_3 с собственным значением 0:

$$a_1^1 I_Y^Y = \delta_1^1 I_1^1 - \delta_1^1 I_Y^1 = 0. \quad (15.1.12)$$

б) Три октета со спином 1. Рассмотрим для каждой пары значений α, β подпространство $T(1, 1)$, порожденное тензорами вида

$$(V_{\beta}^{\alpha})_b^a = I_{\beta}^{\alpha} \otimes \Phi_b^a. \quad (15.1.13)$$

Если $\alpha \neq \beta$, то I_{β}^{α} ортогонален I_Y^Y и, следовательно, подпространства V_2^1, V_1^2 ортогональны ранее построенному подпространству P (а также друг другу).

Третье подпространство, ортогональное V_2^1, V_1^2 и P , можно построить из тензоров вида

$$(V_m)_b^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (I_1^1 - I_2^2) \otimes \Phi_b^a; \quad (15.1.14)$$

в самом деле,

$$(I_1^1 - I_2^2 | I_1^1) = (I_1^1 - I_2^2 | I_2^2) = (I_1^1 - I_2^2 | I_1^2) = 0. \quad (15.1.15)$$

В силу (15.1.6) в каждом из этих подпространств определено представление $SU(3)$ типа $T(1, 1)$. Операторы J -спина переводят построенные подпространства друг в друга:

$$J_- I_2^1 = a_2^1 I_2^1 = 0, \quad J_+ I_2^1 = a_1^2 I_2^1 = I_1^1 - I_2^2, \\ J_+(I_1^1 - I_2^2) = a_1^2 (I_1^1 - I_2^2) = -2I_1^2, \quad J_+ I_1^2 = a_1^2 I_1^2 = 0,$$

откуда

$$J_-(V_2^1)_b^a = 0, \quad J_+(V_2^1)_b^a = \sqrt{2}(V_m)_b^a, \\ J_+(V_m)_b^a = -\sqrt{2}(V_1^2)_b^a, \quad J_-(V_1^2)_b^a = 0. \quad (15.1.16)$$

Выделяя, как и в пункте а), бесследные линейные комбинации Φ_0^a тензоров Φ_b^a , получаем три восьмимерных подпространства $\text{Sum } Y$, инвариантных относительно $SU(3)$:

$$I_2^1 \otimes \Phi_0^a, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(I_1^1 - I_2^2) \otimes \Phi_0^a, \quad -I_1^2 \otimes \Phi_0^a; \quad (15.1.17)$$

обозначим их по-прежнему через V_2^1 , V_m , V_1^2 .

Наконец,

$$J_3(V_2^1)_b^a = a_1^1 I_2^1 \otimes \Phi_b^a = -I_2^2 \otimes \Phi_b^a = -(V_2^1)_b^a, \quad (15.1.18)$$

и аналогично

$$J_3(V_m)_b^a = 0, \quad J_3(V_1^2)_b^a = (V_1^2)_b^a; \quad (15.1.19)$$

следовательно, V_2^1 , V_m , V_1^2 — собственные подпространства J_3 с собственными значениями, соответственно, 1, 0, 1. Поэтому мы обозначим эти подпространства заново через \bar{V} , \bar{V} , \bar{V} .

с) Три синглета со спином 1. Рассмотрим для каждой пары значений α, β одномерное подпространство $T(1, 1)$, порожденное тензором

$$V_{\beta}^{\prime\alpha} = I_{\beta}^{\alpha} \otimes \Phi_c^c. \quad (15.1.20)$$

Так как

$$A_b^a \Phi_c^c = 0, \quad (15.1.21)$$

V_β^α есть инвариантное подпространство для $SU(3)$ (ср. (15.1.6)).

При $\alpha \neq \beta$ будет $\text{Sp} I_\beta^\alpha = 0$ и, согласно (15.1.10), V_β^α состоит из бесследных тензоров. Таким образом, мы получаем одномерные подпространства V_2^1 , V_2^2 пространства 35-плета $\text{Sym} Y$. Третье такое подпространство порождается бесследным тензором

$$V'_m = \frac{1}{\sqrt{2}} (I_1^1 - I_2^2) \otimes \Phi_c^c. \quad (15.1.22)$$

Так как тензор Φ_c^c ортогонален всем бесследным тензорам Φ , подпространства V_2^1 , V'_m , V_1^2 ортогональны P , V_2^1 , V_m , V_1^2 (и, как легко видеть, друг другу, ср. (15.1.15)).

Как и в пункте b) проверяется, что

$$\left. \begin{aligned} J_- V_2^1 = 0, J_+ V_2^1 = \sqrt{2} V'_m, J_+ V'_m = -\sqrt{2} V_1^2, J_+ V_1^2 = 0, \\ J_3 V_2^1 = -V_2^1, J_3 V'_m = 0, J_3 V_1^2 = V_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (15.1.23)$$

Обозначим подпространства синглетов V_2^1 , V'_m , V_1^2 заново через \bar{V}^0 , \bar{V}^+ , \bar{V}^- , с явным указанием j_3 .

Сумма размерностей построенных инвариантных подпространств $SU(3)$ есть $1 \cdot 8 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 1 = 35$. Поэтому $SU(3)$ -редукция 35-плета завершена: *35-плет состоит из одного октета мезонов со спином 0, трех октетов мезонов со спином 1 и трех синглетов мезонов со спином 1.*

Ясно, что принципы классификации § 14.2 в случае 35-плета однозначно определяют разложение на F -мультиплеты и затем на T -мультиплеты, а также векторы состояния $SU(6)/SU(3)$ -частиц (с точностью до множителя). В самом деле, подпространства $j_3 = -1$, $j_3 = 0$, $j_3 = 1$ определяются однозначно. В каждом из них имеется единственное одномерное подпространство, инвариантное отно-

сительно $SU(3)$, чем определяются три синглета V' . При $j_3 = \pm 1$ ортогональные дополнения этих синглетов в соответствующих собственных подпространствах J_3 суть подпространства октетов \bar{V} , V . Применение к \bar{V} оператора J_+ однозначно определяет V . Наконец, ортогональное дополнение к $V \oplus V'$ в подпространстве $j_3 = 0$ однозначно определяет P .

Однозначность дальнейшего разбиения на T -мультиплеты и определения векторов состояния адронов вытекает из принципов $SU(3)$ -теории (ср. § 14.2, VIII.A).

Отождествление элементарных частиц. Применяя к каждому представлению P_b^a , \bar{V}_b^a , V_b^a , V_b^a метод § 9.3, мы получим векторы состояний четырех октетов и соответствующие им значения Y , Q , J_3 . Формула (15.1.4) позволяет выписать выражения соответствующих нормированных векторов через базисные тензоры Ψ_B^A .

Сравнение с таблицами известных из опыта элементарных частиц (см. § 9.1, $F_{1/2}$, $F_{3/2}$, B_0 , B_1 , B_1') позволяет отождествить предсказываемые $SU(6)/SU(3)$ -теорией частицы 35-плета с некоторыми мезонами (составляющими большинство обнаруженных до сих пор мезонов). Следует иметь при этом в виду замечание в § 14.2 по поводу неоднозначности такого отождествления; дополнительное обоснование его мы дадим в главе 17 с помощью массовых формул.

Мезоны октета P мы отождествим с так называемыми *псевдоскалярными мезонами*, которые имеют спин 0 и распадаются на изотопические мультиплеты по признаку близости масс: дублет κ^- , $\tilde{\kappa}^0$, триплет π^- , π^0 , π^+ , синглет η и дублет κ^0 , κ^+ . Сравнение с таблицей строения октета (9.3.25) (в которой надо заменить Φ на P), приводит к отождествлениям

$$P_3^1 = \kappa^-, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(P_1^1 - P_2^2) = \pi^0, \dots, P_1^3 = \kappa^+.$$

Далее, известен из опыта октет *векторных мезонов* со спином 1, распадающийся на дублет κ^* , $\tilde{\kappa}^0$, триплет ρ^- , ρ^0 , ρ^+ , синглет ϕ и дублет κ^{*0} , κ^{*+} . Каждая из этих частиц может находиться в трех спиновых состояниях

$j_3 = -1, 0, 1$, которые мы обозначим верхними левыми индексами: $^{-1}\tilde{\chi}^{-}$, $^0\phi$ и т. д. (Напомним, что в $SU(6)/SU(3)$ -теории разным спиновым состояниям отвечают *разные* элементарные частицы.)

Отождествим \bar{V}^{-} , \bar{V}^0 , \bar{V}^{+} с октетами векторных мезонов, имеющих проекцию спина, соответственно, $j_3 = -1, 0, 1$. Тогда, например,

$$(\bar{V}^{-})_3^2 = {}^{-1}\tilde{\chi}^0, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(2\bar{V}_3^0 - \bar{V}_1^1 - \bar{V}_2^2) = {}^0\phi, \text{ и т. д.}$$

Наконец, синглеты \bar{V}'^{-} , \bar{V}'^0 , \bar{V}'^{+} можно отождествить с мезоном ω в спиновых состояниях $j_3 = -1, 0, 1$; известно, что этот мезон образует изотопический синглет.

Мы приходим к следующей классификационной таблице (таблица 15.1) 35-плета, в которой правый индекс символа частицы означает Q , левый — J_3 (при $J = 0$ левый индекс опускается), а тильда обозначает античастицу в случае $Q = 0$.

Все античастицы для мезонов 35-плета входят в этот же гипермультиплет. Четность всех частиц 35-плета отрицательна. Поэтому четность не включается в символы частиц.

Наконец, знаки нормированных векторов состояний выбраны таким образом, чтобы операторы T_{\pm} , J_{\pm} переводили их друг в друга с *положительными* коэффициентами.

Б. $SU(4)$ -редукция

Для $SU(4)$ -редукции полезно другое представление пространства тензоров $C(1, 1)$. По определению, это пространство есть тензорное произведение $C(6) \otimes \bar{C}(6)$ (3.1.1). Пусть $C(4)$ — четырехмерное подпространство $C(6)$, в котором действует $SU(4)$ (ср. § 13.3). Тогда

$$C(6) = C(4) \oplus C(2), \quad (15.1.24)$$

где $C(2)$ — подпространство, в котором действует подгруппа странного спина $SU(2)_S$. Соответственно, дуальное

Таблица 15.1

35-плет мезонов в $SU(3)$ -редукции

Вектор состояния в $SU(3)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Сим-вол., Q, J_3	T	T_3	Y	J
Октет псевдоскалярных мезонов						
P_3^1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_3^1 + \Psi_6^4)$	κ^-	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0
$-P_3^2$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_3^2 + \Psi_6^5)$	$\tilde{\kappa}^0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0
P_2^1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_2^1 + \Psi_5^4)$	π^-	1	-1	0	0
$\frac{1}{\sqrt{2}}(P_1^1 - P_2^2)$	$\frac{1}{2}[(\Psi_1^1 - \Psi_2^2) + (\Psi_4^4 - \Psi_5^5)]$	π^0	1	0	0	0
$-P_1^2$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1^2 + \Psi_4^5)$	π^+	1	1	0	0
$\frac{1}{\sqrt{6}}(2P_3^3 - P_1^1 - P_2^2)$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}[2(\Psi_3^3 + \Psi_6^6) - (\Psi_1^1 + \Psi_4^4) - (\Psi_2^2 + \Psi_5^5)]$	η^0	0	0	0	0
P_3^3	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_3^3 + \Psi_6^6)$	κ^0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0
P_1^3	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1^3 + \Psi_4^6)$	κ^+	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0

Вектор состояния в $SU(3)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Сим-волл, Q, J_3	T_3	Y	J
Три октета векторных мезонов					
\bar{V}_3^1	Ψ_6^1	$-1\chi^-$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
$-V_3^2$	$-\Psi_6^2$	$\tilde{-1}\chi^0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
\bar{V}_2^1	Ψ_5^1	$-1\rho^-$	1	-1	1
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{V}_1^1 - \bar{V}_2^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_4^1 - \Psi_5^2)$	$-1\rho^0$	1	0	1
$-\bar{V}_1^2$	$-\Psi_4^2$	$-1\rho^+$	1	1	1
$\frac{1}{\sqrt{6}}(2\bar{V}_3^3 - \bar{V}_1^1 - \bar{V}_2^2)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2\Psi_6^3 - \Psi_4^1 - \Psi_5^2)$	$-1\phi^0$	0	0	1
\bar{V}_2^3	Ψ_5^3	$-1\chi^0$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
\bar{V}_1^3	Ψ_4^3	$-1\chi^+$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
\bar{V}_3^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_3^1 - \Psi_6^1)$	$0\chi^-$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
$-\bar{V}_3^2$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_3^2 - \Psi_6^2)$	$\tilde{0}\chi^0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Продолжение таблицы 15.1

Вектор состояния в $SU(3)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Сим-вол, Q, J_3	T	T_3	Y	J
$\begin{aligned} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} V_2^1 \\ & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} V_2^0 (V_1^1 - V_2^2) \\ & \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} V_1^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_2^1 - \Psi_5^5) \\ & \frac{1}{2} [(\Psi_1^1 - \Psi_2^2) - (\Psi_4^4 - \Psi_5^5)] \\ & - \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_1^2 - \Psi_4^4) \end{aligned}$	$0p^-$	1	-1	0	1
		$0p^0$	1	0	0	0
$\begin{aligned} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} V_3^0 (2V_1^0 - V_2^2) \\ & \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} V_1^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{3}} [2(\Psi_3^3 - \Psi_6^6) - (\Psi_1^1 - \Psi_4^4) - (\Psi_2^2 - \Psi_5^5)] \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_2^3 - \Psi_5^6) \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_3^1 - \Psi_6^4) \end{aligned}$	$0\phi^0$	0	0	0	1
		$0\phi^0$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1
$\begin{aligned} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} V_2^3 \\ & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} V_1^3 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_2^3 - \Psi_5^6) \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_3^1 - \Psi_6^4) \end{aligned}$	$0\kappa^0$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1
		$0\kappa^+$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
$\begin{aligned} & \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} V_3^1 \\ & \begin{matrix} + \\ 2 \end{matrix} V_3^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & -\Psi_3^4 \\ & \Psi_3^5 \end{aligned}$	$1\kappa^-$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1
		$1\kappa^0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1

Вектор состояния в $SU(3)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Сим-вол, Q, J_3	T	T_3	Y	J
$-\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{matrix} +V_2^1 \\ +V_1^1 - V_2^2 \end{matrix}$	$-\Psi_2^4$	$1\rho^-$	1	-1	0	1
$+\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{matrix} +V_1^1 \\ +V_2^2 \end{matrix}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_1^4 - \Psi_2^5)$	$1\rho^0$	1	0	0	1
$+\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{matrix} +V_1^1 \\ +V_2^2 \end{matrix}$	Ψ_1^5	$1\rho^+$	1	1	0	1
$-\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{matrix} +2V_3^3 \\ +V_1^1 - V_2^2 \end{matrix}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}} (2\Psi_3^6 - \Psi_1^4 - \Psi_2^5)$	$1\phi^0$	0	0	0	1
$-\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{matrix} +V_2^3 \\ +V_1^3 \end{matrix}$	$-\Psi_2^6$	$1\kappa^0$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1
$+\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{matrix} +V_1^3 \\ +V_2^3 \end{matrix}$	$-\Psi_1^6$	$1\kappa^+$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
Три синглета векторных мезонов						
\bar{V}'	$\frac{1}{\sqrt{3}} (\Psi_1^4 + \Psi_2^5 + \Psi_3^6)$	$-1\omega^0$	0	0	0	1
\bar{V}^0	$\frac{1}{\sqrt{6}} (\Psi_1^4 + \Psi_2^5 + \Psi_3^6 - \Psi_4^4 - \Psi_5^5 - \Psi_6^6)$	$0\omega^0$	0	0	0	1
$+\bar{V}'$	$-\frac{1}{\sqrt{3}} (\Psi_1^4 + \Psi_2^5 + \Psi_3^6)$	$1\omega^0$	0	0	0	1

пространство разлагается в ортогональную сумму

$$\bar{C}(6) = \bar{C}(4) \oplus \bar{C}(2). \quad (15.1.25)$$

Теперь можно представить пространство тензоров $C(1, 1)$ в виде

$$\begin{aligned} C(1, 1) &= C(6) \otimes \bar{C}(6) = \\ &= C(4) \otimes \bar{C}(4) \oplus C(4) \otimes \bar{C}(2) \oplus C(2) \otimes \bar{C}(4) \oplus \\ &\quad \oplus C(2) \otimes \bar{C}(2). \end{aligned} \quad (15.1.26)$$

Обозначим операторы $ASU(4)$, для краткости, через $W_{\bar{B}}^{\bar{A}}$ (ср. (13.3.12)), где \bar{A} заменяет пару индексов $\alpha\bar{a}$ и пробегает значения 1, 2, 4, 5.

Рассмотрим действие оператора $W_{\bar{B}}^{\bar{A}}$ на векторы четырех подпространств правой части (15.1.26). Мы найдем при этом неприводимые подпространства группы $SU(4)$.

а) 15-плет мезонов. Базис $C(4) \otimes \bar{C}(4)$ составляют тензоры

$$\Psi_{\bar{D}}^{\bar{C}}, \quad \bar{C}, \bar{D} = 1, 2, 4, 5. \quad (15.1.27)$$

Так как, согласно (13.3.12),

$$\begin{aligned} W_{\bar{B}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{D}}^{\bar{C}} &= A_{\bar{B}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{D}}^{\bar{C}} - \frac{1}{4} \delta_{\bar{B}}^{\bar{A}} A_{\bar{K}}^{\bar{K}} \Psi_{\bar{D}}^{\bar{C}} = \\ &= \delta_{\bar{D}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{B}}^{\bar{C}} - \delta_{\bar{B}}^{\bar{C}} \Psi_{\bar{D}}^{\bar{A}} - \frac{1}{4} \delta_{\bar{B}}^{\bar{A}} (\delta_{\bar{D}}^{\bar{K}} \Psi_{\bar{K}}^{\bar{C}} - \delta_{\bar{B}}^{\bar{C}} \Psi_{\bar{D}}^{\bar{K}}) = \\ &= \delta_{\bar{D}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{B}}^{\bar{C}} - \delta_{\bar{B}}^{\bar{C}} \Psi_{\bar{D}}^{\bar{A}}, \end{aligned} \quad (15.1.28)$$

16-мерное подпространство $C(4) \otimes \bar{C}(4)$ инвариантно относительно группы $SU(4)$, и полученное при этом представление $SU(4)$ есть тензорное представление типа $T(1, 1)$ над пространством $C(4)$. Регулярное представление $SU(4)$ выделяется из $T(1, 1)$ условием бесследности $T_{\bar{C}}^{\bar{C}} = 0$. Оно соответствует схеме Юнга (1, 0, 1), и его неприводимость доказывается так же, как в случае (14.1.4). Наложение одного условия бесследности уменьшает размерность пространства на 1, и мы получаем 15-мерное неприводимое подпространство группы $SU(4)$. Соответствующее представление задается (15.1.28), причем следует

иметь в виду, что базисные тензоры $\Psi_{\bar{B}}^{\bar{A}}$ не все принадлежат пространству 15-плета; (15.1.28) применяется к их бесследным линейным комбинациям.

Покажем, что пространство 15-плета является собственным подпространством операторов S_3, Y . В силу (13.3.24)

$$S_3 \Psi_{\bar{B}}^{\bar{A}} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}_3^3 - \mathbf{A}_6^6) \Psi_{\bar{B}}^{\bar{A}} = 0, \quad (15.1.29)$$

так как \bar{A}, \bar{B} пробегает значения 1, 2, 4, 5. Аналогично из (13.2.21) следует:

$$Y \Psi_{\bar{B}}^{\bar{A}} = - (\mathbf{A}_3^3 + \mathbf{A}_6^6) \Psi_{\bar{B}}^{\bar{A}} = 0. \quad (15.1.30)$$

Таким образом, для частиц 15-плета $S_3 = Y = 0$.

Поскольку подгруппа $SU(2)_T$ расположена в группе $SU(4)$ так же, как $SU(3)$ и $SU(6)$, изотопическое разложение 15-плета вполне аналогично $SU(3)$ -редукции 35-плета в пункте А. Представим $C(4)$ в виде $C(2) \otimes C(2)_T$ (§ 13.3); чтобы подчеркнуть роль нестранного и изотопического спина, обозначим теперь $C(2)$ через $C(2)_N$ и положим $N_\beta^\alpha = I_\beta^\alpha$, $\Theta_b^{\bar{a}} = \Phi_b^{\bar{a}}$. Тогда базисные тензоры над $C(4)$ представляются в виде

$$\Psi_{\bar{B}}^{\bar{A}} = \Psi_{\bar{b}B}^{\alpha\bar{a}} = N_\beta^\alpha \otimes \Theta_b^{\bar{a}}. \quad (15.1.31)$$

Далее, обозначим операторы нестранного спина через N_β^α , а матрицы Окубо, действующие в пространствах $C(2)_N, C(2)_T$, соответственно, через $(a_N)_\beta^\alpha, (a_T)_\beta^\alpha$. Тогда из (13.3.18) и (13.2.24) легко следуют формулы

$$N_\beta^\alpha (N_\delta^\gamma \otimes \Theta_d^{\bar{c}}) = (a_N)_\beta^\alpha N_\delta^\gamma \otimes \Theta_d^{\bar{c}} = (\delta_\delta^\alpha N_\beta^\gamma - \delta_\beta^\gamma N_\delta^\alpha) \otimes \Theta_d^{\bar{c}}, \quad (15.1.32)$$

$$\begin{aligned} T_b^{\bar{a}} (N_\beta^\gamma \otimes \Theta_d^{\bar{c}}) &= N_\beta^\gamma \otimes T_b^{\bar{a}} \Theta_d^{\bar{c}} = N_\beta^\gamma \otimes (a_T)_b^{\bar{a}} \Theta_d^{\bar{c}} = \\ &= N_\beta^\gamma \otimes (\delta_d^{\bar{a}} \Theta_b^{\bar{c}} - \delta_b^{\bar{c}} \Theta_d^{\bar{a}}). \end{aligned} \quad (15.1.33)$$

Чтобы получить разложение 15-плета на T -мультиплеты, рассмотрим следующие подпространства в пространстве 15-плета.

(aa) Подпространство, порожденное тензорами

$$N_Y^Y \otimes \Theta_b^{\bar{a}}. \quad (15.1.34)$$

В силу (15.1.33) это подпространство инвариантно относительно подгруппы изоспина $SU(2)_T$, и на нем определяется представление этой подгруппы типа $T(1,1)$ (над $C(2)$).

Накладывая на Θ условие бесследности, получаем изотопический триплет

$$N_Y^Y \otimes \Theta_2^1, N_Y^Y \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1^1 - \Theta_2^2), N_Y^Y \otimes (-\Theta_1^2). \quad (15.1.35)$$

Значение проекции нестраничного спина для этого триплета подсчитывается по формуле (15.1.32):

$$N_3(N_Y^Y \otimes \Theta) = M_1^1(N_Y^Y \otimes \Theta) = (\delta_Y^1 N_Y^1 - \delta_1^Y N_Y^Y) \otimes \Theta = 0. \quad (15.1.36)$$

(ab) Подпространства, порожденные тензорами

$$N_\beta^\alpha \otimes \Theta_b^{\bar{a}}, \quad (15.1.37)$$

где пара индексов α, β фиксирована.

Условие бесследности налагается опять на Θ . Из тензоров N строятся линейные комбинации, ортогональные N_Y^Y , т. е.

$$N_3^1, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(N_1^1 - N_2^2), \quad N_1^2.$$

Мы приходим к трем изотопическим триплетам:

$$N_2^1 \otimes \Theta_0, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(N_1^1 - N_2^2) \otimes \Theta_0, \quad -N_1^2 \otimes \Theta_0. \quad (15.1.38)$$

Так как

$$N_3 N_2^1 = -N_2^1, \quad N_3(N_1^1 - N_2^2) = 0, \quad N_3 N_1^2 = N_1^2, \quad (15.1.39)$$

этим триплетам соответствуют значения N_3 , равные, соответственно, $-1, 0, 1$.

(ас) Подпространства, порожденные тензорами

$$N_{\beta}^{\alpha} \otimes \Theta_c^{\bar{c}}, \quad (15.1.40)$$

где пара индексов α, β фиксирована.

Условие бесследности накладывается теперь на N . Ортогональность полученных подпространств предыдущим следует из того, что $\Theta_c^{\bar{c}}$ ортогонален всем бесследным тензорам Θ . Мы приходим, таким образом, к трем изотопическим синглетам со значением $N_3 = -1, 0, 1$:

$$N_2^1 \otimes \Theta_c^{\bar{c}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(N_1^1 - N_2^2) \otimes \Theta_c^{\bar{c}}, \quad -N_1^2 \otimes \Theta_c^{\bar{c}}. \quad (15.1.41)$$

Сумма размерностей полученных инвариантных подпространств $1 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 15$; тем самым изотопическое разложение 15-плета завершено.

б) Четыре квадруплета мезонов. Базис $C(4) \otimes \tilde{C}(2)$ составляют базисные тензоры

$$\Psi_A^3, \quad \Psi_A^6, \quad \bar{A} = 1, 2, 4, 5. \quad (15.1.42)$$

Согласно (13.3.12)

$$W_{\bar{B}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{C}}^3 = A_{\bar{B}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{C}}^3 - \frac{1}{4} \delta_{\bar{B}}^{\bar{A}} A_{\bar{K}}^{\bar{K}} \Psi_{\bar{C}}^3 = \delta_{\bar{C}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{B}}^3 - \frac{1}{4} \delta_{\bar{B}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{C}}^3. \quad (15.1.43)$$

Это значит, что операторы $W_{\bar{B}}^{\bar{A}}$ действуют в подпространстве $\Psi_{\bar{C}}^3$, как четырехрядные операторы Окубо в фундаментальном представлении (ср. (5.3.27)). Следовательно, представление 35-плета индуцирует фундаментальное представление подгруппы $SU(4)$ в подпространстве $\Psi_{\bar{C}}^3$, откуда следует неприводимость этого подпространства. То же верно и для второго подпространства (15.1.42). Таким образом, тензоры (15.1.42) порождают два W -квадруплета. Другие два квадруплета получаются в подпространстве $C(2) \otimes \tilde{C}(4)$.

Пользуясь формулами (13.2.21), (13.3.22), имеем:

$$\left. \begin{aligned} Y \Psi_A^3 &= -(\mathbf{A}_3^3 + \mathbf{A}_6^6) \Psi_A^3 = \Psi_A^3, & Y \Psi_A^6 &= \Psi_A^6, \\ S_3 \Psi_A^3 &= \frac{1}{2} (\mathbf{A}_3^3 - \mathbf{A}_6^6) \Psi_A^3 = -\frac{1}{2} \Psi_A^3, \\ S_3 \Psi_A^6 &= \frac{1}{2} \Psi_A^6, \\ S_- \Psi_A^3 &= \mathbf{A}_6^3 \Psi_A^3 = 0, \\ S_+ \Psi_A^3 &= \mathbf{A}_3^6 \Psi_A^3 = -\Psi_A^6, & S_+ \Psi_A^6 &= 0. \end{aligned} \right\} (15.1.44)$$

Отсюда видно, что квадруплеты Ψ_A^3, Ψ_A^6 имеют оба гиперзаряд $Y = 1$, проекцию странного спина, соответственно, $S_3 = -1/2, S_3 = 1/2$ и связаны операторами S_+, S_- так, как этого требует принцип § 14.2.

Для квадруплетов $\Psi_6^{\bar{A}}, \Psi_3^{\bar{A}}$, аналогично, $Y = -1$ и, соответственно, $S_3 = -1/2, S_3 = 1/2$.

Чтобы разложить квадруплеты на изотопические мультиплеты, положим

$$\left. \begin{aligned} I_\alpha^1 &= N_\alpha, & I_\alpha^2 &= N'_\alpha, & I_1^\alpha &= N^\alpha, & I_2^\alpha &= N'^\alpha, \\ \Phi_a^3 &= \Theta_a^-, & \Phi_3^{\bar{a}} &= \Theta_a^-. \end{aligned} \right\} (15.1.45)$$

Тогда тензоры четырех квадруплетов представляются в виде

$$N_\alpha \otimes \Theta_a^-, N'_\alpha \otimes \Theta_a^-, N^\alpha \otimes \Theta_a^{\bar{a}}, N'^\alpha \otimes \Theta_a^{\bar{a}}. \quad (15.1.46)$$

Легко проверить (ср. (13.3.18)) соотношения

$$\begin{aligned} N_-(N_2 \otimes \Theta_a^-) &= 0, & N_+(N_2 \otimes \Theta_a^-) &= N_1 \otimes \Theta_a^-, \\ N_+(N_1 \otimes \Theta_a^-) &= 0 \end{aligned} \quad (15.1.47)$$

и аналогичные соотношения для других квадруплетов.

При каждом значении α мы получаем изотопический дублет. Из (13.2.24) легко следует, что

$$T_+(N_\alpha \otimes \Theta_2) = N_\alpha \otimes \Theta_1, \quad T_+(N'_\alpha \otimes \Theta_2) = N'_\alpha \otimes \Theta_1, \quad (15.1.48)$$

$$T_+(N^\alpha \otimes \Theta^1) = -N^\alpha \otimes \Theta^2, \quad T_+(N'^\alpha \otimes \Theta^1) = -N'^\alpha \otimes \Theta^2. \quad (15.1.49)$$

с) Три синглета мезонов. Базис $C(2) \otimes \tilde{C}(2)$ составляют тензоры вида

$$\Psi_B^A, \quad A, B = 3, 6, \quad (15.1.50)$$

или, в двухиндексной записи,

$$\Psi_{\beta\alpha}^{\gamma\delta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (15.1.51)$$

Каждый из этих тензоров порождает одномерное инвариантное подпространство группы $SU(4)$, так как, в силу (13.3.12),

$$W_{\beta\bar{\alpha}}^{\alpha\bar{\beta}} \Psi_{\delta\gamma}^{\gamma\delta} = 0. \quad (15.1.52)$$

Из тензоров (15.1.50) можно построить три бесследных линейных комбинации

$$\Psi_6^3, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_3^3 - \Psi_6^6), \quad -\Psi_3^6. \quad (15.1.53)$$

Соответствующие значения

$$S_3 = -1, 0, 1, \quad (15.1.54)$$

причем

$$S_- \Psi_6^3 = 0, \quad S_+ \Psi_6^3 = \Psi_3^3 - \Psi_6^6, \quad S_+(\Psi_3^3 - \frac{1}{2}\Psi_6^6) = -2\Psi_3^6, \\ S_+ \Psi_3^6 = 0. \quad (15.1.55)$$

Наконец, значения N_3, Y для тензоров (15.1.53) равны

$$N_3 = 0, 0, 0, \quad Y = 0, 0, 0. \quad (15.1.56)$$

d) Синглет мезонов. В том же самом подпространстве $C(2) \otimes \tilde{C}(2)$ содержится еще тензор $\Psi_3^3 + \Psi_6^6$, ортогональный предыдущим, но не бесследный. Его проекция на подпространство 35-плета, как легко видеть, есть

$$\Psi_3^3 + \Psi_6^6 - \frac{1}{3} \Psi_C^C. \quad (15.1.57)$$

Легко видеть, что соответствующий (15.1.57) нормированный вектор состояния есть

$$\frac{1}{3\sqrt{2}}(2\Psi_3^3 + 2\Psi_6^6 - \Psi_1^1 - \Psi_2^2 - \Psi_4^4 - \Psi_5^5). \quad (15.1.58)$$

Покажем, что тензор (15.1.58) ортогонален всем построенным инвариантным подпространствам $SU(4)$. Так как пространство $C(2) \otimes \bar{C}(2)$ в (15.1.26) ортогонально трем предыдущим слагаемым, в которых лежат построенные выше W -мультиплеты, а вектор Ψ_C^C ортогонален всем бесследным тензорам, то надо проверить лишь, что $\Psi_3^3 + \Psi_6^6$ ортогонален тензорам (15.1.53), что очевидно.

Так как, в силу (13.3.12), (15.1.28),

$$W_{\beta\bar{b}}^{\alpha\bar{a}} (\Psi_{13}^{13} + \Psi_{23}^{23}) = 0, \quad W_{\beta\bar{b}}^{\alpha\bar{a}} \Psi_{\gamma\bar{c}}^{\gamma\bar{c}} = \delta_{\gamma}^{\alpha} \delta_{\bar{c}}^{\bar{a}} \Psi_{\beta\bar{b}}^{\gamma\bar{c}} - \delta_{\beta}^{\gamma} \delta_{\bar{b}}^{\bar{c}} \Psi_{\gamma\bar{c}}^{\alpha\bar{a}} = 0, \quad (15.1.59)$$

тензор (15.1.58) порождает одномерное инвариантное подпространство группы $SU(4)$. Легко видеть, что на этом подпространстве $S_3 = Y = 0$.

Так как сумма размерностей W -мультиплетов равна $1 \cdot 15 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 35$, то мы нашли все W 35-плета мезонов и разложили их на T -мультиплеты.

Как и в случае $SU(3)$ -редукции, легко показать, что в случае 35-плета принципы классификации § 14.2 однозначно определяют W -мультиплеты, T -мультиплеты и векторы состояния $SU(6)/SU(4)$ -частиц (с точностью до множителя).

Полученные результаты можно записать в виде таблицы (таблица 15.2). В этой таблице каждая $SU(6)/SU(4)$ -частица имеет вектор состояния, выраженный через базис Ψ_B^A , что делает возможным сравнение с таблицей $SU(3)$ -редукции. С помощью этого сравнения производится отождествление частиц; в тех случаях, когда векторы состояния в двух редукциях не совпадают, вместо символа $SU(6)/SU(3)$ -частицы проставляется линейная комбинация, изображающая соответствующую комбинацию векторов состояния. Знаки базисных векторов выбраны таким образом, чтобы операторы S_{\pm} , N_{\pm} , T_{\pm} переводили их друг в друга с положительными коэффициентами.

Принципиальная сторона возникающих расхождений между понятиями $SU(6)/SU(3)$ - и $SU(6)/SU(4)$ -частицы будет обсуждена ниже.

В таблице 15.2 левый индекс в символе частицы есть проекция спина $J_3 = N_3 + S_3$; в случае частицы спина 0 левый индекс опускается.

Таблица 15.2

35-плет мезонов в $SU(4)$ -редукции

Вектор состояния в $SU(4)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Символ, Q, J_3	T_3	Y	N_3	S	S_3
15-плет мезонов							
$N_1^+ \otimes \theta_2^+$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_2^+ + \Psi_3^+)$	π^-	1	-1	0	0	0
$N_1^+ \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta_1^+ - \theta_2^+)$	$\frac{1}{2} [(\Psi_1^+ - \Psi_2^+) + (\Psi_4^+ - \Psi_5^+)]$	π^0	1	0	0	0	0
$N_1^+ \otimes (-\theta_1^+)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_2^+ + \Psi_4^+)$	π^+	1	1	0	0	0
$N_2^+ \otimes \theta_2^+$	Ψ_5^+	$-1\rho^-$	1	-1	0	1	0
$N_2^+ \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta_1^+ - \theta_2^+)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_4^+ - \Psi_5^+)$	$-1\rho^0$	1	0	0	1	0
$N_2^+ \otimes (-\theta_1^+)$	$-\Psi_4^+$	$-1\rho^+$	1	1	0	1	0
$\frac{1}{\sqrt{2}} (N_1^+ - N_2^+) \otimes \theta_2^+$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_2^+ - \Psi_5^+)$	$0\rho^-$	1	-1	0	1	0
$\frac{1}{\sqrt{2}} (N_1^+ - N_2^+) \otimes \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta_1^+ - \theta_2^+)$	$\frac{1}{2} [(\Psi_1^+ - \Psi_2^+) - (\Psi_4^+ - \Psi_5^+)]$	$0\rho^0$	1	0	0	1	0
$\frac{1}{\sqrt{2}} (N_1^+ - N_2^+) \otimes (-\theta_2^+)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_2^+ - \Psi_5^+)$	$0\rho^+$	1	1	0	1	0

Вектор состояния в $SU(4)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Символ, Q, J_3	T_3	Y	N	N_3	S	S_3
$(-N_1^2) \otimes \theta_2^1$	$-\Psi_2^4$	$1p^-$	1	-1	0	1	0	0
$(-N_1^2) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1^1 - \theta_2^2)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1^4 - \Psi_2^5)$	$1p^0$	1	0	0	1	0	0
$(-N_1^2) \otimes (-\theta_2^1)$	Ψ_1^5	$1p^+$	1	1	0	1	0	0
$N_2^1 \otimes \theta_c^{\bar{c}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_4^1 + \Psi_5^2)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}^{-1}\omega^0-$ $-\sqrt{\frac{1}{3}}^{-1}\varphi^0$	0	0	0	1	-1	0
$\frac{1}{\sqrt{2}}(N_1^1 - N_2^2) \otimes \theta_c^{\bar{c}}$	$\frac{1}{2}[(\Psi_1^1 - \Psi_4^4) + (\Psi_2^2 - \Psi_5^5)]$	$\sqrt{\frac{2}{3}}^0\omega^0-$ $-\sqrt{\frac{1}{3}}^0\varphi^0$	0	0	0	1	0	0
$(-N_1^2) \otimes \theta_c^{\bar{c}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1^4 + \Psi_2^5)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}^1\omega^0-$ $-\sqrt{\frac{1}{3}}^1\varphi^0$	0	0	0	1	1	0

Вектор состояния в $SU(4)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Символ, Q, J_3	T	T_3	Y	N	N_3	S	S_3
Четыре квадруплета мезонов									
$N^1 \otimes \Theta^1$	Ψ_6^1	$-1, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-N^1 \otimes \Theta^2$	$-\Psi_6^2$	$\frac{1}{2}, 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-N^2 \otimes \Theta^1$	$-\Psi_6^4$	$\frac{1}{\sqrt{2}} ({}^0\tilde{\chi}^- - \chi^-)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$N^2 \otimes \Theta^2$	Ψ_6^5	$\frac{1}{\sqrt{2}} ({}^0\tilde{\chi}^0 - \tilde{\chi}^0)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$N^1 \otimes \Theta^1$	Ψ_3^1	$\frac{1}{\sqrt{2}} ({}^0\tilde{\chi}^- + \chi^-)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-N^1 \otimes \Theta^2$	$-\Psi_3^2$	$\frac{1}{\sqrt{2}} ({}^0\tilde{\chi}^0 + \tilde{\chi}^0)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-N^2 \otimes \Theta^1$	$-\Psi_3^4$	$1, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$N^2 \otimes \Theta^2$	Ψ_3^5	$\frac{1}{2}, 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Продолжение таблицы 15.2

Вектор состояния в $SU(4)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Символ, Q, J_3	T	T_3	Y	N	N_3	S	S_3
$N_2 \otimes \theta_2$ $N_2 \otimes \theta_1$	Ψ_5^3 Ψ_4^3	$-1^* \chi^0$ $-1^* \chi^+$	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	1	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$
			$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	1	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$
$N_1 \otimes \theta_1$ $N_1 \otimes \theta_1$	Ψ_2^3 Ψ_1^3	$\frac{1}{\sqrt{2}} ({}^0 \chi^0 + \chi^0)$ $\frac{1}{\sqrt{2}} ({}^0 \chi^+ + \chi^+)$	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	1	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$
			$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	1	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$
$-N'_2 \otimes \theta_2$ $-N'_2 \otimes \theta_1$	$-\Psi_5^6$ $-\Psi_4^6$	$\frac{1}{\sqrt{2}} ({}^0 \chi^0 - \chi^0)$ $\frac{1}{\sqrt{2}} ({}^0 \chi^+ - \chi^+)$	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	1	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$
			$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	1	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$
$-N'_1 \otimes \theta_2$ $-N'_1 \otimes \theta_1$	$-\Psi_2^6$ $-\Psi_1^6$	$1^* \chi^0$ $1^* \chi^+$	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	1	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$
			$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	1	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$

Вектор состояния в $SU(4)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Символ, Q, J_3	T_3	Y	N_3	S	S_3
Три синглета мезонов							
	Ψ_6^3	$\sqrt{\frac{1}{3}}^{-1}\omega^0 + \sqrt{\frac{2}{3}}^{-1}\varphi^0$	0	0	0	1	-1
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_3^3 - \Psi_6^6)$	$\sqrt{\frac{1}{3}}^0\omega^0 + \sqrt{\frac{2}{3}}^0\varphi^0$	0	0	0	1	0
	$-\Psi_3^6$	$\sqrt{\frac{1}{3}}^1\omega^0 + \sqrt{\frac{2}{3}}^1\varphi^0$	0	0	0	1	1
Синглет мезонов							
	$\frac{1}{2\sqrt{3}}[2(\Psi_3^3 + \Psi_6^6) - (\Psi_1^1 + \Psi_3^1) - (\Psi_2^2 + \Psi_5^5)]$	η^0	0	0	0	0	0

§ 15.2. 56-плет барионов

Этот гипермультиплет задается представлением группы со схемой Юнга $(3, 0, 0, 0, 0)$ (см. (14.1.8)). Пространство 56-плета $\text{Sym} Y$ состоит из всех симметрических тензоров типа T^{ABC} . Представление 56-плета индуцируется тензорным представлением типа $T(3, 0)$ на подпространстве симметрических тензоров. Базисные тензоры пространства $T(3, 0)$ суть

$$\Psi_{ABC}, \quad A, B, C = 1, \dots, 6. \quad (15.2.1)$$

Эти тензоры ортонормированы в пространстве $T(3, 0)$:

$$(\Psi_{ABC} | \Psi_{A'B'C'}) = \delta_{AA'} \cdot \delta_{BB'} \cdot \delta_{CC'}. \quad (15.2.2)$$

Действие операторов Окубо на базисные тензоры описывается формулами (см. (5.3.24), (5.3.26)):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_B^A \Psi_{CDE} &= \delta_C^A \Psi_{BDE} + \delta_D^A \Psi_{CBE} + \delta_E^A \Psi_{CDE} \quad (A \neq B), \\ \mathbf{A}_A^A \Psi_{CDE} &= \left[n(A) - \frac{1}{2} \right] \Psi_{CDE} \quad (\text{н.с.}), \end{aligned} \right\} \quad (15.2.3)$$

где $n(A)$ — число индексов тензора Ψ_{CDE} , равных A .

A. $SU(3)$ -редукция

Представим тензоры (15.2.1) в виде

$$\Psi_{ABC} = \Psi_{\alpha\alpha, \beta b, \gamma c} = I_{\alpha\beta\gamma} \otimes \Phi_{abc}, \quad (15.2.4)$$

где $I_{\alpha\beta\gamma}$ — базисные тензоры типа $T(3, 0)$ над пространством $C(2)$, а Φ_{abc} — базисные тензоры типа $T(3, 0)$ над $C(3)$.

Для операторов F -спина в представлении 56-плета, согласно (13.2.14), имеем:

$$F_b^a \Psi_{\gamma c, \delta d, \epsilon e} = I_{\gamma\delta\epsilon} \otimes A_b^a \Phi_{cde}. \quad (15.2.5)$$

Аналогично, в силу (13.2.17),

$$J_\beta^\alpha \Psi_{\gamma c, \delta d, \epsilon e} = a_\beta^\alpha I_{\gamma\delta\epsilon} \otimes \Phi_{cde}. \quad (15.2.6)$$

В частности,

$$\left. \begin{aligned} Q\Psi_{\gamma c, \delta d, \epsilon e} &= I_{\gamma\delta\epsilon} \otimes Q\Phi_{cde}, \\ Y\Psi_{\gamma c, \delta d, \epsilon e} &= I_{\gamma\delta\epsilon} \otimes Y\Phi_{cde}, \\ J_3\Psi_{\gamma c, \delta d, \epsilon e} &= a_1^1 I_{\gamma\delta\epsilon} \otimes \Phi_{cde}, \\ J_+\Psi_{\gamma c, \delta d, \epsilon e} &= a_1^2 I_{\gamma\delta\epsilon} \otimes \Phi_{cde}, \\ J_-\Psi_{\gamma c, \delta d, \epsilon e} &= a_2^1 I_{\gamma\delta\epsilon} \otimes \Phi_{cde}, \end{aligned} \right\} (15.2.7)$$

где Q, Y в правых частях — операторы заряда и гиперзаряда $SU(3)$ -теории.

Теперь нетрудно указать неприводимые подпространства для подгруппы $SU(3)$.

а) Четыре декуплета барионов. Обозначим символом Sym операцию, ставящую в соответствие каждому базисному тензору типа $T(3,0)$ нормированный симметрический тензор (ср. § 9.3):

$$\text{Sym } \Phi_{cde} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}}(\Phi_{cde} + \Phi_{dec} + \Phi_{ecd} + \Phi_{ced} + \Phi_{edc} + \Phi_{dce}) \\ (c, d, e \text{ различны}), \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(\Phi_{cdd} + \Phi_{dcd} + \Phi_{ddc}) & (d = e, d \neq c), \\ \Phi_{ccc} & (c = d = e), \end{cases} (15.2.8)$$

и аналогично для тензоров Ψ, I . Фиксируем некоторый симметрический тензор I . Тогда тензоры вида

$$I_s \otimes \text{Sym } \Phi_{abc} (15.2.9)$$

порождают подпространство $T(3,0)$, состоящее из симметрических тензоров, и потому принадлежащее пространству 56-плета.

Представление $\text{Sym } Y$ группы $SU(6)$, задающее 56-плет, индуцирует в этом подпространстве, в силу (15.2.5), десятирядное неприводимое представление подгруппы $SU(3)$.

Согласно третьей формуле (15.2.7), можно получить, таким образом, десятимерные собственные подпространст-

ва оператора J_3 , выбирая в качестве I_s собственные векторы оператора Окубо a_1^1 .

Существуют четыре таких собственных вектора:

$$I_{222}, \text{Sym } I_{122}, \text{Sym } I_{112}, I_{111}, \quad (15.2.10)$$

принадлежащих, как легко проверить, собственным значениям $-3/2, -1/2, 1/2, 3/2$ оператора a_1^1 , причем

$$a_2^1 I_{222} = 0, \quad a_1^2 I_{222} = \sqrt{3} \text{Sym } I_{122}, \quad a_1^2 \text{Sym } I_{112} = 2 \text{Sym } I_{112}, \\ a_1^2 \text{Sym } I_{112} = \sqrt{3} I_{111}, \quad a_1^1 I_{111} = 0. \quad (15.2.11)$$

Это вытекает из формул для операторов a_β^α (см. (5.3.24), (5.3.26)):

$$a_\beta^\alpha I_{\gamma\delta\epsilon} = \delta_\gamma^\alpha I_{\beta\delta\epsilon} + \delta_\delta^\alpha I_{\gamma\beta\epsilon} + \delta_\epsilon^\alpha I_{\gamma\delta\beta} \quad (\alpha \neq \beta), \\ a_x^\alpha I_{\gamma\delta\epsilon} = \left[n(\alpha) - \frac{3}{2} \right] I_{\gamma\delta\epsilon} \quad (\text{н.с.}), \quad (15.2.12)$$

где $n(\alpha)$ — число индексов тензора $I_{\gamma\delta\epsilon}$, равных α .

Из (15.2.6) следует теперь, что четыре декуплета, полученных из (15.2.10), связаны с помощью операторов спина J_+ , J_- так, как этого требует принцип VII.A § 14.2.

Итак, мы получаем четыре декуплета барионов:

$$I_{222} \otimes \text{Sym } \Phi_{abc}, \text{Sym } I_{122} \otimes \text{Sym } \Phi_{abc}, \text{Sym } I_{112} \otimes \text{Sym } \Phi_{abc}, \\ I_{111} \otimes \text{Sym } \Phi_{abc}, \quad (15.2.13)$$

со значениями проекции спина J_3 , соответственно, $-3/2, -1/2, 1/2, 3/2$. С помощью (15.2.4) можно выразить базисные тензоры этих декуплетов через Ψ_{ABC} , пользуясь базисными тензорами декуплета из таблицы (9.3.45).

б) Два октета барионов. Мы получили некоторые симметрические тензоры над $C(6)$, умножая симметрические тензоры над $C(2)$ на симметрические же тензоры над $C(3)$. Если перемножить тензоры над $C(2)$ и $C(3)$, обладающие другим строением, то, вообще говоря, полученные тензоры над $C(6)$ не будут симметричны; их можно, однако, подвергнуть симметризации, и таким образом получают новые F -мультиплеты.

Возьмем, например, тензоры $I_{[\alpha\beta]\gamma}$, $\Phi_{[ab]c}$, антисимметрические по отношению к первым двум индексам. Тензорное произведение таких тензоров будет обладать неполной симметрией (только по отношению к первым двум индексам A, B); но, как мы увидим, дальнейшая симметризация по A, B, C приводит в точности к недостающим F -мультиплетам 56-плета.

Рассмотрим в $T(3,0)$ над $C(3)$ подпространство, порожденное тензорами

$$\Phi_{ikb} - \Phi_{kbi}. \quad (15.2.14)$$

Это подпространство заслуживает особенного внимания по той причине, что на нем представление $T(3,0)$ группы $SU(3)$ индуцирует представление типа $T(1,1)$, содержащее регулярное (октетное) представление. В самом деле, положим (ср. (5.2.14))

$$X_b^a = \frac{1}{2\sqrt{2}} \epsilon^{ika} (\Phi_{ikb} - \Phi_{kib}). \quad (15.2.15)$$

Заметим, что выражение (15.2.15) равносильно следующему правилу: по заданным a, b находят такие l, m , чтобы (lma) было четной перестановкой чисел 1, 2, 3; тогда

$$X_b^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_{lmb} - \Phi_{mlb}).$$

Легко проверить, что тензоры X_b^a составляют ортонормированную систему:

$$\begin{aligned} (X_b^a | X_d^c) &= \frac{1}{8} \epsilon^{ika} \epsilon^{jlc} (\Phi_{ikb} - \Phi_{kib} | \Phi_{jld} - \Phi_{ldj}) = \\ &= \frac{1}{8} \epsilon^{ika} \epsilon^{jlc} (\delta_{li} \delta_{kl} \delta_{bd} - \delta_{kj} \delta_{il} \delta_{bd} - \delta_{il} \delta_{kj} \delta_{bd} + \delta_{kl} \delta_{ij} \delta_{bd}) = \\ &= \delta^{ac} \delta_{bd}. \end{aligned} \quad (15.2.16)$$

Подвергнем тензоры X_d^c действию операторов Окубо A_b^a . Для этого воспользуемся формулами для операторов A_b^a (см. (5.3.24), (5.3.26)):

$$A_b^a \Phi_{cde} = \delta_c^a \Phi_{bde} + \delta_d^a \Phi_{cbe} + \delta_e^a \Phi_{cdb} \quad (a \neq b), \quad (15.2.17)$$

$$A_a^a \Phi_{cde} = [n(a) - 1] \Phi_{cde} \quad (\text{н. с.}),$$

где $n(a)$ — число индексов Φ_{cde} , равных a .

Нетрудные вычисления с помощью этих формул приводят к соотношению

$$A_b^a X_d^c = \delta_d^a X_b^c - \delta_b^c X_d^a. \quad (15.2.18)$$

Следовательно, представление типа $T(3,0)$ группы $SU(3)$ индуцирует на подпространстве X представление типа $T(1,1)$.

Выделяя в X бесследные тензоры, т. е. линейные комбинации

$$X_0 = T_a^b X_b^a, \quad T_a^a = 0, \quad (15.2.19)$$

мы приходим к регулярному восьмимерному представлению $SU(3)$.

В силу формулы (15.2.5), для произвольного I тензоры

$$I \otimes X_0 \quad (15.2.20)$$

порождают восьмимерное неприводимое подпространство группы $SU(3)$. Однако эти тензоры не симметричны, т. е. не входят в пространство 56-плета. Кроме того, мы должны еще позаботиться о том, чтобы наши новые тензоры были ортогональны построенным выше пространствам декуплетов. Это последнее требование будет выполнено, если взять в качестве I в (15.2.20) тензоры, ортогональные всем симметрическим тензорам типа $T(3,0)$, т. е. образующим (15.2.10). Например, можно взять тензоры, антисимметрические по первой паре индексов; тогда получаются восьмимерные инвариантные относительно $SU(3)$ подпространства

$$\left. \begin{aligned} (I_{122} - I_{212}) \otimes X_0, \\ (I_{121} - I_{211}) \otimes X_0. \end{aligned} \right\} \quad (15.2.21)$$

Заметим, что подпространства (15.2.21) ортогональны друг другу. Эти подпространства, однако, состоят не из симметрических тензоров. Поэтому мы подвергнем их симметризации.

Оператор симметризации S равен сумме операторов s (см. (3.6.18)), каждый из которых унитарен и, следова-

тельно, переводит ортогональные векторы в ортогональные. Поскольку для симметрических тензоров T , из которых состоят пространства декуплетов,

$$sT = T, \quad (15.2.22)$$

то «симметризованные» подпространства

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{S} \{ (I_{122} - I_{212}) \otimes X_0 \}, \\ \mathbf{S} \{ (I_{121} - I_{211}) \otimes X_0 \} \end{aligned} \right\} \quad (15.2.23)$$

будет по-прежнему ортогональны к пространствам декуплетов. Они ортогональны также друг другу, так как тензоры первого из них выражаются через Ψ_{ABC} с одним индексом, большим трех, а второго — с двумя. Соотношения ортогональности станут очевидны, когда будут выписаны базисные векторы всех F -мультиплетов, выраженные через Ψ_{ABC} (см. таблицу 15.3).

Проверим, что (15.2.23) — собственные подпространства J_3 .

Так как оператор \mathbf{S} перестановочен с операторами Окубо, можно провести вычисление для тензоров (15.2.21). Согласно (15.2.6), надо найти $a_1^1 (I_{122} - I_{212})$, $a_1^1 (I_{121} - I_{211})$; из (15.2.12) получаем собственные значения $-1/2$, $1/2$. Наконец,

$$\begin{aligned} a_2^1 (I_{122} - I_{212}) &= 0, \quad a_1^2 (I_{122} - I_{212}) = I_{121} - I_{211}, \\ a_1^2 (I_{121} - I_{211}) &= 0; \end{aligned} \quad (15.2.24)$$

из (15.2.6) следует, что октет (15.2.23) связаны с помощью операторов спина J_+ , J_- так, как этого требует принцип VII.A § 14.2.

Чтобы выразить базисные тензоры (15.2.23) через Ψ_{ABC} , надо подставить вместо X_0 базисные тензоры регулярного представления, т.е. X_3^1 , $-X_3^2, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}} (X_1^1 - X_2^2), \dots, X_1^3$,

затем выразить X_b^a через Φ_{cde} по формуле (15.2.15) и, наконец, воспользоваться разложением (15.2.4). При этом полезно иметь в виду замечание, сопровождающее формулу (15.2.15).

Поскольку сумма размерностей F -мультиплетов $4 \cdot 10 + 2 \cdot 8 = 56$, $SU(3)$ -редукция 56-плета завершена. Однозначность редукции очевидна, так как подпространства декуплетов с $J_3 = -3/2, 3/2$ определяются собственным значением J_3 , другие два подпространства декуплетов получаются из предыдущих действием операторов J_+, J_- , а в ортогональном дополнении к декуплетам можно выделить подпространства октетов, как собственные подпространства с $J_3 = -1/2, J_3 = 1/2$.

Результаты собраны в таблице 15.3, в которой векторы состояния $SU(6)/SU(3)$ -теории отождествляются с известными из опыта барионами, имеющими те же значения Q, Y, J .

Античастицы для барионов 56-плета составляют другой 56-плет того же строения. Четность всех частиц 56-плета и соответствующего 56-плета античастиц положительна.

Б. $SU(4)$ -редукция

Для $SU(4)$ -редукции представим пространство $C(6)$, как в § 15.1, Б:

$$C(6) = C(4) \oplus C(2). \quad (15.2.25)$$

Тогда пространство тензоров $C(3,0)$ представляется в виде:

$$\begin{aligned} C(3,0) &= C(6) \otimes C(6) \otimes C(6) = \\ &= C(4) \otimes C(4) \otimes C(4) \oplus C(4) \otimes C(4) \otimes C(2) \oplus \\ &\oplus C(4) \otimes C(2) \otimes C(4) \oplus C(2) \otimes C(4) \otimes C(4) \oplus \\ &\oplus C(4) \otimes C(2) \otimes C(2) \oplus C(2) \otimes C(4) \otimes C(2) \oplus \\ &\oplus C(2) \otimes C(2) \otimes C(4) \oplus C(2) \otimes C(2) \otimes C(2). \quad (15.2.26) \end{aligned}$$

Так как операторы подгруппы $SU(4)$ переводят векторы $C(4)$ в векторы того же пространства, а векторы $C(2)$ оставляют неизменными, то все восемь подпространств в правой части (15.2.26) инвариантны относительно операторов, представляющих эту подгруппу.

Интересующие нас подпространства пространства 56-плета должны состоять из симметрических по A, B, C тензоров. Такие тензоры будут построены с помощью

Таблица 15.3

56-плет барионов в $SU(3)$ -редукции

Вектор состояния в $SU(3)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Символ, Q, J_3	T_3	Y	J
Четыре дуплета барионов					
$I_{222} \otimes \Phi_{333}$	Ψ_{666}	$-\frac{3}{2} \Omega^-$	0	-2	$\frac{3}{2}$
$I_{222} \otimes \text{Sym } \Phi_{233}$	$\text{Sym } \Psi_{566}$	$-\frac{3}{2} \Xi_8^-$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$I_{222} \otimes \text{Sym } \Phi_{133}$	$\text{Sym } \Psi_{466}$	$-\frac{3}{2} \Xi_8^0$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$I_{222} \otimes \text{Sym } \Phi_{223}$	$\text{Sym } \Psi_{556}$	$-\frac{3}{2} \Sigma_8^-$	1	-1	$\frac{3}{2}$
$I_{222} \otimes \text{Sym } \Phi_{123}$	$\text{Sym } \Psi_{456}$	$-\frac{3}{2} \Sigma_8^0$	1	0	$\frac{3}{2}$
$I_{222} \otimes \text{Sym } \Phi_{113}$	$\text{Sym } \Psi_{446}$	$-\frac{3}{2} \Sigma_8^+$	1	1	$\frac{3}{2}$

Вектор состояния в $SU(3)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Символ, Q, J_3	T_3	Y	J
$I_{222} \otimes \text{Sym } \Phi_{112}$	$\text{Sym } \Psi_{445}$	$-\frac{3}{2} \Delta_8^+$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
	Ψ_{444}	$-\frac{3}{2} \Delta_8^{++}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$I_{222} \otimes \Phi_{111}$					
$\text{Sym } I_{122} \otimes \Phi_{333}$	$\text{Sym } \Psi_{366}$	$-\frac{1}{2} \Omega^-$	0	-2	$\frac{3}{2}$
	$\sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{266} + \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{356}$	$-\frac{1}{2} E_8^-$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$
	$\sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{166} + \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{346}$	$-\frac{1}{2} E_8^0$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$
$\text{Sym } I_{122} \otimes \text{Sym } \Phi_{223}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{355} + \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{256}$	$-\frac{1}{2} \Sigma_8^-$	-1	0	$\frac{3}{2}$
	$\frac{1}{\sqrt{3}} (\text{Sym } \Psi_{156} + \text{Sym } \Psi_{246} + \text{Sym } \Psi_{343})$	$-\frac{1}{2} \Sigma_8^0$	0	0	$\frac{3}{2}$
	$\sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{344} + \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{146}$	$-\frac{1}{2} \Sigma_8^+$	1	0	$\frac{3}{2}$
$\text{Sym } I_{122} \otimes \text{Sym } \Phi_{123}$					
$\text{Sym } I_{122} \otimes \text{Sym } \Phi_{113}$	$\text{Sym } \Psi_{366}$	$-\frac{1}{2} \Omega^-$	0	-2	$\frac{3}{2}$
	$\sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{266} + \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{356}$	$-\frac{1}{2} E_8^-$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$
	$\sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{166} + \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{346}$	$-\frac{1}{2} E_8^0$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$

Вектор состояния в $SU(3)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Символ, Q, J_3	T_3	Y	J
$\text{Sym } I_{112} \otimes \Phi_{222}$	$\text{Sym } \Psi_{255}$	$-\frac{1}{2} \Delta_8^-$	$3 - \frac{1}{2}$	1	$3 - \frac{1}{2}$
$\text{Sym } I_{112} \otimes \text{Sym } \Phi_{112}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{135} + \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{145}$	$-\frac{1}{2} \Delta_8^0$	$3 - \frac{1}{2}$	1	$3 - \frac{1}{2}$
$\text{Sym } I_{112} \otimes \text{Sym } \Phi_{112}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{244} + \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{145}$	$-\frac{1}{2} \Delta_8^+$	$3 - \frac{1}{2}$	1	$3 - \frac{1}{2}$
$\text{Sym } I_{112} \otimes \Phi_{111}$	$\text{Sym } \Psi_{144}$	$-\frac{1}{2} \Delta_8^{++}$	$3 - \frac{1}{2}$	1	$3 - \frac{1}{2}$
$\text{Sym } I_{11} \otimes \Phi_{333}$	$\text{Sym } \Psi_{336}$	$\frac{1}{2} \Omega^-$	0	-2	$3 - \frac{1}{2}$
$\text{Sym } I_{112} \otimes \text{Sym } \Phi_{233}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{335} + \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{236}$	$\frac{1}{2} \Xi_8^-$	$1 - \frac{1}{2}$	-1	$3 - \frac{1}{2}$
$\text{Sym } I_{112} \otimes \text{Sym } \Phi_{133}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{334} + \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{116}$	$\frac{1}{2} \Xi_8^0$	$1 - \frac{1}{2}$	-1	$3 - \frac{1}{2}$
$\text{Sym } I_{112} \otimes \text{Sym } \Phi_{223}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{226} + \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{235}$	$\frac{1}{2} \Sigma_8^-$	1	0	$3 - \frac{1}{2}$

Вектор состояния в $SU(3)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Символ, Q, J_3	T_3	Y	J
$\text{Sym } I_{112} \otimes \text{Sym } \Phi_{133}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} (\text{Sym } \Psi_{126} + \text{Sym } \Psi_{135} + \text{Sym } \Psi_{234})$	$\frac{1}{2} \Sigma_8^0$	0	0	$\frac{3}{2}$
$\text{Sym } I_{112} \otimes \text{Sym } \Phi_{113}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{116} + \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{134}$	$\frac{1}{2} \Sigma_8^+$	1	0	$\frac{3}{2}$
$\text{Sym } I_{112} \otimes \Phi_{222}$	$\text{Sym } \Psi_{225}$	$\frac{1}{2} \Delta_8^-$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$\text{Sym } I_{112} \otimes \text{Sym } \Phi_{122}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{214} + \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{125}$	$\frac{1}{2} \Delta_8^0$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$\text{Sym } I_{112} \otimes \text{Sym } \Phi_{112}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{115} + \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{124}$	$\frac{1}{2} \Delta_8^+$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$\text{Sym } I_{112} \otimes \Phi_{111}$	$\text{Sym } \Psi_{114}$	$\frac{1}{2} \Delta_8^{++}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$I_{111} \otimes \Phi_{333}$	Ψ_{333}	$\frac{3}{2} \Omega^-$	0	-2	$\frac{3}{2}$
$I_{111} \otimes \text{Sym } \Phi_{233}$	$\text{Sym } \Psi_{233}$	$\frac{3}{2} \Xi_8^-$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$
$I_{111} \otimes \text{Sym } \Phi_{133}$	$\text{Sym } \Psi_{133}$	$\frac{3}{2} \Xi_8^0$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$

Вектор состояния в $SU(3)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Символ, Q, J_3	T	T_3	Y	J
$I_{111} \otimes \text{Sum } \Phi_{223}$	$\text{Sum } \Psi_{223}$	$\frac{3}{2} \Sigma_8^-$	1	-1	0	$\frac{3}{2}$
$I_{111} \otimes \text{Sum } \Phi_{123}$	$\text{Sum } \Psi_{123}$	$\frac{3}{2} \Sigma_8^0$	1	0	0	$\frac{3}{2}$
$I_{111} \otimes \text{Sum } \Phi_{113}$	$\text{Sum } \Psi_{113}$	$\frac{3}{2} \Sigma_8^+$	1	1	0	$\frac{3}{2}$
$I_{111} \otimes \Phi_{222}$	Ψ_{222}	$\frac{3}{2} \Delta_8^-$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$I_{111} \otimes \text{Sum } \Phi_{122}$	$\text{Sum } \Psi_{122}$	$\frac{3}{2} \Delta_8^0$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$I_{111} \otimes \text{Sum } \Phi_{112}$	$\text{Sum } \Psi_{112}$	$\frac{3}{2} \Delta_8^+$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$I_{111} \otimes \Phi_{111}$	Ψ_{111}	$\frac{3}{2} \Delta_8^{++}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
(два октета барионов)						
$\text{Sum } \{(I_{122} - I_{212}) \otimes X_3\}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sum } \Psi_{268} - \sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sum } \Psi_{356}$	$-\frac{1}{2} E^-$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$

Продолжение таблицы 15.3

Вектор состояния в $SU(3)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Символ, Q, J_3	T_3	Y	J
$\text{Sym} \{ (I_{122} - I_{112}) \otimes (-X_3^2) \}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{168} - \sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{345}$	$-\frac{1}{2} \Xi^0$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
$\text{Sym} \{ (I_{122} - I_{212}) \otimes X_1^2 \}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{355} + \sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{256}$	$-\frac{1}{2} \Sigma^-$	-1	0	$\frac{1}{2}$
$\text{Sym} \left\{ (I_{122} - I_{212}) \otimes \right.$ $\left. \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (X_1^1 - X_2^2) \right\}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}} (2 \text{Sym } \Psi_{345} - \text{Sym } \Psi_{156} - \text{Sym } \Psi_{246})$	$-\frac{1}{2} \Sigma^0$	0	0	$\frac{1}{2}$
$\text{Sym} \{ (I_{122} - I_{212}) \otimes (-X_1^2) \}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{344} + \sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{146}$	$-\frac{1}{2} \Sigma^+$	1	0	$\frac{1}{2}$
$\text{Sym} \{ (I_{122} - I_{212}) \otimes$ $\left. \otimes \frac{1}{\sqrt{6}} (2X_3^3 - X_1^1 - X_2^2) \right\}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (\text{Sym } \Psi_{155} - \text{Sym } \Psi_{246})$	$-\frac{1}{2} \Lambda^0$	0	0	$\frac{1}{2}$
$\text{Sym} \{ (I_{112} - I_{212}) \otimes X_2^3 \}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{155} - \sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{245}$	$-\frac{1}{2} N^0$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\text{Sym} \{ (I_{122} - I_{212}) \otimes X_1^1 \}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{244} + \sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{145}$	$-\frac{1}{2} N^+$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Вектор состояния в $SU(3)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Символ, Q, J_3	T_3	Y	J
$\text{Sym} \{(I_{121} - I_{211}) \otimes X_3^1\}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{335} + \sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{256}$	$\frac{1}{2} \Sigma^-$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
$\text{Sym} \{(I_{101} - I_{211}) \otimes (-X_3^2)\}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{34} + \sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{136}$	$\frac{1}{2} \Sigma^0$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
$\text{Sym} \{(I_{101} - I_{211}) \otimes X_2^1\}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{236} - \sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{235}$	$\frac{1}{2} \Sigma^-$	-1	0	$\frac{1}{2}$
$\text{Sym} \{(I_{121} - I_{211}) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1^1 - X_2^2)\}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2 \text{Sym } \Psi_{156} - \text{Sym } \Psi_{135} - \text{Sym } \Psi_{234})$	$\frac{1}{2} \Sigma^0$	0	0	$\frac{1}{2}$
$\text{Sym} \{(I_{121} - I_{211}) \otimes (-X_2^1)\}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{116} - \sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{114}$	$\frac{1}{2} \Sigma^+$	1	0	$\frac{1}{2}$
$\text{Sym} \{(I_{121} - I_{211}) \otimes$ $\otimes \frac{1}{\sqrt{6}}(2X_3^3 - X_1^1 - X_2^2)\}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(\text{Sym } \Psi_{234} - \text{Sym } \Psi_{135})$	$\frac{1}{2} \Lambda^0$	0	0	$\frac{1}{2}$
$\text{Sym} \{(I_{121} - I_{211}) \otimes X_2^3\}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{234} + \sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{125}$	$\frac{1}{2} N^0$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\text{Sym} \{(I_{121} - I_{211}) \otimes X_1^3\}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{116} - \sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{124}$	$\frac{1}{2} N^+$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$

симметризации из тензоров подпространств (15.2.26). Эти последние не все инвариантны по отношению к симметризации, но сумма в каждой строке (15.2.26) инвариантна.

а) 20-плет барионов. Базис $C(4) \otimes C(4) \otimes C(4)$ составляют тензоры

$$\Psi_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}, \quad \bar{A}, \bar{B}, \bar{C} = 1, 2, 4, 5. \quad (15.2.27)$$

Согласно (13.3.12), (15.2.3),

$$\begin{aligned} W_{\bar{B}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{C}\bar{D}\bar{E}} &= \mathbf{A}_{\bar{B}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{C}\bar{D}\bar{E}} - \frac{1}{4} \delta_{\bar{B}}^{\bar{A}} \mathbf{A}_{\bar{K}}^{\bar{K}} \Psi_{\bar{C}\bar{D}\bar{E}} = \\ &= \delta_{\bar{C}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{B}\bar{D}\bar{E}} + \delta_{\bar{D}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{C}\bar{B}\bar{E}} + \delta_{\bar{E}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{C}\bar{D}\bar{B}} \quad (\bar{A} \neq \bar{B}), \\ W_{\bar{A}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{C}\bar{D}\bar{E}} &= \left\{ n(\bar{A}) - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sum_{\bar{K}} \left[n(\bar{K}) - \frac{1}{2} \right] \right\} \Psi_{\bar{C}\bar{D}\bar{E}} = \\ &= \left[n(\bar{A}) - \frac{3}{4} \right] \Psi_{\bar{C}\bar{D}\bar{E}} \quad (\text{н. с.}), \end{aligned} \quad (15.2.28)$$

где $n(\bar{A})$ — число индексов тензора $\Psi_{\bar{C}\bar{D}\bar{E}}$, равных \bar{A} .

Сравнение с формулами (5.3.24), (5.3.26) показывает, что представление $T(3,0)$ группы $SU(6)$ индуцирует на подгруппе $SU(4)$ представление того же типа в подпространстве (15.2.27). Симметрические тензоры (15.2.27) образуют инвариантное подпространство $SU(4)$, в котором действует неприводимое представление этой группы со схемой Юнга (3, 0, 0) (ср. (14.1.8)). Степень полученного представления, согласно (3.6.9), равна 20.

Так как

$$\left. \begin{aligned} Y \Psi_{\bar{C}\bar{D}\bar{E}} &= -(\mathbf{A}_3^3 + \mathbf{A}_6^6) \Psi_{\bar{C}\bar{D}\bar{E}} = \Psi_{\bar{C}\bar{D}\bar{E}}, \\ S_3 \Psi_{\bar{C}\bar{D}\bar{E}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{A}_3^3 - \mathbf{A}_6^6) \Psi_{\bar{C}\bar{D}\bar{E}} = 0, \\ S_- \Psi_{\bar{C}\bar{D}\bar{E}} &= \mathbf{A}_6^3 \Psi_{\bar{C}\bar{D}\bar{E}} = 0, \\ S_+ \Psi_{\bar{C}\bar{D}\bar{E}} &= \mathbf{A}_3^6 \Psi_{\bar{C}\bar{D}\bar{E}} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (15.2.29)$$

соответствующие 20-плету собственные значения Y , S_3 равны, соответственно, 1 и 0, а странный спин его частиц равен нулю.

(аа) Чтобы разложить 20-плет на изотопические мультиплеты, представим его базисные тензоры (15.2.27) в виде

$$\Psi_{\overline{ABC}} = \Psi_{\alpha\overline{a}, \beta\overline{b}, \gamma\overline{c}} = N_{\alpha\beta\gamma} \otimes \Theta_{\overline{abc}}, \quad (15.2.30)$$

где $N_{\alpha\beta\gamma}$, $\Theta_{\overline{abc}}$ — тензоры типа $T(3,0)$ над пространствами $C(2)$, обозначенные разными символами, чтобы не смешивать левый сомножитель, связанный с подгруппой нестраниного спина $SU(2)_N$, с правым, связанным с подгруппой изоспина $SU(2)_T$. Нетрудно проверить формулы, аналогичные (15.2.5), (15.2.6):

$$T_{\overline{b}}^{\overline{a}} \Psi_{\gamma\overline{c}, \delta\overline{d}, \epsilon\overline{e}} = N_{\gamma\delta\epsilon} \otimes a_{\overline{b}}^{\overline{a}} \Theta_{\overline{cde}}, \quad (15.2.31)$$

$$N_{\beta}^{\alpha} \Psi_{\gamma\overline{c}, \delta\overline{d}, \epsilon\overline{e}} = a_{\beta}^{\alpha} N_{\gamma\delta\epsilon} \otimes \Theta_{\overline{cde}}, \quad (15.2.32)$$

где $T_{\overline{b}}^{\overline{a}}$, N_{β}^{α} , соответственно, — операторы изоспина и нестраниного спина.

Из (15.2.31) вытекает, что при любом симметрическом тензоре N тензоры

$$N \otimes_s \Theta_s, \quad (15.2.33)$$

где Θ_s симметричен, порождают инвариантное пространство подгруппы $SU(2)_T$.

Выбирая в качестве N тензоры

$$N_{222}, \text{Sym} N_{122}, \text{Sym} N_{112}, N_{111} \quad (15.2.34)$$

(ср. (15.2.10)), мы получаем четыре таких подпространства. В каждом из них находим базис, полагая Θ_s равным

$$\Theta_{222}, \text{Sym} \Theta_{122}, \text{Sym} \Theta_{112}, \Theta_{111}. \quad (15.2.35)$$

Таким образом, в 20-плете содержится четыре изотопических квадруплета со значениями $N_3 = -3/2, -1/2, 1/2, 3/2$.

(аб) Остальные T -мультиплеты 20-плета находятся аналогично октетам барионов в § 15.2, А. Составим сначала

тензоры

$$X_{\bar{b}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \epsilon^{\bar{i}\bar{k}} (\Theta_{\bar{i}\bar{k}\bar{b}} - \Theta_{\bar{k}\bar{i}\bar{b}}). \quad (15.2.36)$$

Легко видеть, что

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Theta_{121} - \Theta_{211}), \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Theta_{122} - \Theta_{212}). \quad (15.2.37)$$

Эти тензоры ортонормированы, и по формуле (15.2.12) легко подсчитать, что

$$\begin{aligned} a_2^1 X_2 &= 0, & a_1^2 X_2 &= X_1, & a_1^2 X_1 &= 0, \\ a_1^1 X_2 &= -\frac{1}{2} X_2, & a_1^1 X_1 &= \frac{1}{2} X_1. \end{aligned} \quad (15.2.38)$$

Следовательно, тензоры X_2 , X_1 порождают двумерное неприводимое подпространство группы $SU(2)$. В силу (15.2.31), (15.2.32) двумерные подпространства, порожденные

$$\text{Sym} \{(N_{122} - N_{212}) \otimes X_{\bar{b}}\}, \text{Sym} \{(N_{121} - N_{211}) \otimes X_{\bar{b}}\}, \quad (15.2.39)$$

инвариантны относительно $SU(2)_T$ (ср. (15.2.23)) и являются собственными подпространствами N_3 с собственными значениями $-1/2$, $1/2$. Легко проверить, что эти подпространства ортогональны пространствам квадруплетов (15.2.33) и друг другу. Поскольку сумма размерностей $4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 20$, изотопическое разложение 20-плета завершено.

б) Два декуплета барионов. Базис $C(4) \otimes C(4) \otimes C(2)$ составляют тензоры

$$\Psi_{\bar{A}\bar{B}_3}, \quad \bar{A}, \bar{B} = 1, 2, 4, 5, \quad (15.2.40)$$

$$\Psi_{\bar{A}\bar{B}_6}, \quad \bar{A}, \bar{B} = 1, 2, 4, 5. \quad (15.2.41)$$

Поскольку исследование обоих случаев аналогично,

рассмотрим тензоры (15.2.40). Согласно (15.2.3)

$$\begin{aligned}
 W_{\bar{C}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{C}\bar{D}3} &= \mathbf{A}_{\bar{B}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{C}\bar{D}3} - \frac{1}{4} \delta_{\bar{B}}^{\bar{A}} \mathbf{A}_{\bar{K}}^{\bar{K}} \Psi_{\bar{C}\bar{D}3} = \\
 &= \delta_{\bar{C}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{B}\bar{D}3} + \delta_{\bar{D}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{C}\bar{B}3} \quad (\bar{A} \neq \bar{B}), \\
 W_{\bar{A}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{C}\bar{D}3} &= \left\{ n(\bar{A}) - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sum_{\bar{K}} \left[n(\bar{K}) - \frac{1}{2} \right] \right\} \Psi_{\bar{C}\bar{D}3} = \\
 &= \left[n(\bar{A}) - \frac{1}{2} \right] \Psi_{\bar{C}\bar{D}3},
 \end{aligned} \tag{15.2.42}$$

где $n(\bar{A})$ равно числу индексов $\Psi_{\bar{C}\bar{D}3}$, равных \bar{A} , т. е. числу индексов в паре \bar{C}, \bar{D} , равных \bar{A} .

Как видно из формул (15.2.42), подпространство, порожденное тензорами (15.2.40), инвариантно относительно $SU(4)$, причем представление 56-плета индуцирует в нем представление $SU(4)$ типа $T(2,0)$ (ср. (5.3.24), (5.3.26)). Тензоры

$$\text{Sym } \Psi_{\bar{A}\bar{B}3}, \text{ Sym } \Psi_{\bar{A}\bar{B}6}, \quad \bar{A}, \bar{B} = 1, 2, 4, 5, \tag{15.2.43}$$

порождают поэтому неприводимые представления $SU(4)$ со схемой Юнга $(2, 0, 0)$. Степень этих представлений, в силу (3.6.9), равна 10^* . Вычисления, аналогичные (15.2.29), дают значения для этих декуплетов

$$Y = 0, S_3 = \frac{1}{2}, \text{ соответственно, } Y = 0, S_3 = -\frac{1}{2}. \tag{15.2.44}$$

Далее,

$$S_- \Psi_{\bar{A}\bar{B}6} = 0, \quad S_+ \Psi_{\bar{A}\bar{B}6} = \Psi_{\bar{A}\bar{B}3}, \quad S_+ \Psi_{\bar{A}\bar{B}3} = 0; \tag{15.2.45}$$

следовательно, декуплеты (15.2.43) связаны операторами S -спина так, как этого требует принцип VII.Б из § 14.2.

Разложим декуплет (15.2.40) на T -мультиплеты. Для этого представим каждый тензор (15.2.40) в виде

$$\Psi_{\bar{A}\bar{B}3} = \Psi_{\alpha\bar{a}, \beta\bar{b}, 13} = N_{\alpha\beta} \otimes \Theta_{\bar{a}\bar{b}}. \tag{15.2.46}$$

*) Заметим, что эти декуплеты соответствуют представлениям группы $SU(4)$, а не $SU(6)$ и, как мы увидим, имеют другой изотопический состав.

(ba) Подпространства T -мультиплетов могут быть найдены, как в (15.2.33) (с последующей симметризацией); но теперь вместо (15.2.34) надо взять базис *трехрядного* неприводимого представления $SU(2)$

$$N_{22}, \text{Sym } N_{12}, N_{11}, \quad (15.2.47)$$

а вместо (15.2.35) —

$$\Theta_{22}, \text{Sym } \Theta_{12}, \Theta_{11}. \quad (15.2.48)$$

Таким образом, в 10-плете содержатся три T -триплета со значениями $N_3 = -1, 0, 1$.

(bb) Остается найти T -синглет, ортогональный этим триплетам. Для синглета должно быть $N_3 = 0, T_3 = 0$; поэтому естественно искать его базисные векторы в виде

$$\text{Sym} \{(N_{12} - N_{21}) \otimes (\Theta_{12} - \Theta_{21})\}. \quad (15.2.49)$$

Легко проверить, что тензор (15.2.49) действительно переводится в нуль операторами $T_{\bar{b}}^a$.

с) Три квадруплета барионов. Базис $C(4) \otimes C(2) \otimes C(2)$ составляют тензоры

$$\Psi_{A33}^-, \Psi_{A36}^-, \Psi_{A63}^-, \Psi_{A66}^-. \quad (15.2.50)$$

Согласно (15.2.3)

$$\left. \begin{aligned} W_{\bar{B}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{C}33}^- &= \left(\mathbf{A}_{\bar{B}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{C}33}^- - \frac{1}{4} \delta_{\bar{B}}^{\bar{A}} \mathbf{A}_{\bar{K}}^{\bar{K}} \right) \Psi_{\bar{C}33}^- = \\ &= \delta_{\bar{C}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{B}33}^- \quad (\bar{A} \neq \bar{B}), \\ W_{\bar{A}}^{\bar{A}} \Psi_{\bar{C}33}^- &= \left[\delta_{\bar{C}}^{\bar{A}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sum_{\bar{K}} \left(\delta_{\bar{C}}^{\bar{K}} - \frac{1}{2} \right) \right] \Psi_{\bar{C}33}^- = \\ &= \left(\delta_{\bar{C}}^{\bar{A}} - \frac{1}{4} \right) \Psi_{\bar{C}33}^- \quad (\text{н. с.}). \end{aligned} \right\} \quad (15.2.51)$$

Это значит, что операторы $W_{\bar{B}}^{\bar{A}}$ действуют на подпространстве $\Psi_{\bar{A}33}^-$, как четырехрядные операторы Окубо. Следовательно, в этом подпространстве (и в трех других подпространствах (15.2.50)) представление $T(3,0)$ группы $SU(6)$ индуцирует фундаментальное представление группы $SU(4)$

(ср. (15.1.43)). Симметризация приводит к трем W -кваруплетам 56-плета, порожденным, соответственно, векторами

$$\text{Sym } \Psi_{\bar{A}66}^-, \text{Sym } \Psi_{\bar{A}36}^-, \text{Sym } \Psi_{\bar{A}33}^- \quad (\bar{A} = 1, 2, 4, 5). \quad (15.2.52)$$

Вычисления, аналогичные (15.2.29), дают для всех трех кваруплетов значение $Y = -1$. S_3 равно для кваруплетов (15.2.52), соответственно,

$$S_3 = -1, 0, 1. \quad (15.2.53)$$

Наконец, кваруплеты связаны операторами S_+ , S_- :

$$S_- \text{Sym } \Psi_{\bar{A}66}^- = 0, \quad S_+ \text{Sym } \Psi_{\bar{A}66}^- = \sqrt{2} \text{Sym } \Psi_{\bar{A}36}^-,$$

$$S_+ \text{Sym } \Psi_{\bar{A}36}^- = \sqrt{2} \text{Sym } \Psi_{\bar{A}33}^-, \quad S_+ \text{Sym } \Psi_{\bar{A}33}^- = 0. \quad (15.2.54)$$

Чтобы разложить полученные W -кваруплеты на T -мультиплеты, положим (ср. (15.1.46))

$$\Psi_{\bar{A}33}^- = \Psi_{\alpha\bar{a}, 13, 13}^- = N_\alpha \otimes \Theta_{\bar{a}}^-. \quad (15.2.55)$$

Тогда при каждом $\alpha = 1, 2$ получается T -дублет, порожденный тензорами

$$\text{Sym}(N_\alpha \otimes \Theta_{\bar{a}}^-), \quad \bar{a} = 1, 2. \quad (15.2.56)$$

Значения N_3 , T_3 для тензоров (15.2.56) находятся также, как в § 15.1, Б.

d) Четыре синглета барионов. Базис $C(2) \otimes C(2) \otimes C(2)$ составляют тензоры

$$\Psi_{ABC}, \quad A, B, C = 3, 6. \quad (15.2.57)$$

Так как для этих тензоров

$$W_{\bar{B}}^{\bar{A}} \Psi_{CDE} = \mathbf{A}_{\bar{B}}^{\bar{A}} \Psi_{CDE} = 0, \quad (15.2.58)$$

то каждый из них порождает одномерное инвариантное подпространство группы $SU(4)$. Симметризация приводит к четырем синглетам 56-плета, с векторами состояния

$$\Psi_{666}, \text{Sym } \Psi_{366}, \text{Sym } \Psi_{336}, \Psi_{333}. \quad (15.2.59)$$

56-плет барионов в SU(4)-редукции

Вектор состояния в SU(4)-базисе	Вектор состояния. в SU(6)-базисе	Символ, Q, J ₃	T	T ₈	Y	N ₃	S	S ₃
20-плет барионов								
$N_{222} \otimes \Theta_{222}$	Ψ_{555}	$-\frac{3}{2} \Delta_8^-$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	0
$N_{222} \otimes \text{Sym } \Theta_{122}$	$\text{Sym } \Psi_{455}$	$-\frac{3}{2} \Delta_8^0$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	0
$N_{222} \otimes \text{Sym } \Theta_{112}$	$\text{Sym } \Psi_{445}$	$-\frac{3}{2} \Delta_8^+$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	0
$N_{222} \otimes \Theta_{111}$	Ψ_{444}	$-\frac{3}{2} \Delta_8^{++}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	0
$\text{Sym } N_{122} \otimes \Theta_{222}$	$\text{Sym } \Psi_{255}$	$-\frac{1}{2} \Delta_8^-$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	0
$\text{Sym } N_{122} \otimes \text{Sym } \Theta_{122}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{165} +$ $+ \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{345}$	$-\frac{1}{2} \Delta_8^0$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	0

Вектор состояния в $SU(4)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Символ, Q, J_3	T	T_3	Y	N	N_3	S	S_3
$\text{Sym } N_{122} \otimes \text{Sym } \Theta_{112}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{244} +$ $+ \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{145}$	$-\frac{1}{2} \Delta_8^+$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
$\text{Sym } N_{122} \otimes \Theta_{111}$	$\text{Sym } \Psi_{144}$	$-\frac{1}{2} \Delta_8^{++}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
$\text{Sym } N_{112} \otimes \Theta_{222}$	$\text{Sym } \Psi_{225}$	$\frac{1}{2} \Delta_8^-$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\text{Sym } N_{112} \otimes \text{Sym } \Theta_{122}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{224} +$ $+ \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{125}$	$\frac{1}{2} \Delta_8^0$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\text{Sym } N_{112} \otimes \text{Sym } \Theta_{112}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{115} +$ $+ \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{124}$	$\frac{1}{2} \Delta_8^+$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0

Вектор состояния в $SU(4)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Символ, Q, J_3	T_3	Y	N_3	S	S_3
$\text{Sym } N_{112} \otimes \Theta_{111}$	$\text{Sym } \Psi_{114}$	$\frac{1}{2} \Delta_8^{++}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	0
$N_{111} \otimes \Theta_{222}$	Ψ_{222}	$\frac{3}{2} \Delta_8^-$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	0
$N_{111} \otimes \text{Sym } \Theta_{132}$	$\text{Sym } \Psi_{12}$	$\frac{3}{2} \Delta_8^0$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	0
$N_{111} \otimes \text{Sym } \Theta_{112}$	$\text{Sym } \Psi_{112}$	$\frac{3}{2} \Delta_8^+$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	0
$N_{111} \otimes \Theta_{111}$	Ψ_{111}	$\frac{3}{2} \Delta_8^{++}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	0
$\text{Sym } \{(N_{122} - N_{212}) \otimes X_2\}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{135} -$ $-\sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{245}$	$-\frac{1}{2} N^0$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0
$\text{Sym } \{(N_{122} - N_{212}) \otimes X_1\}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{241} +$ $+\sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{145}$	$-\frac{1}{2} N^+$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0

Вектор состояния в $SU(4)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Символ, Q, J_3	T	T_3	Y	N	N_3	S	S_3
$\text{Sym} \{(N_{121} - N_{11}) \otimes X_i\}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{224} +$ $+\sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{125}$	$\frac{1}{2} N^0$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\text{Sym} \{(N_{121} - N_{211}) \otimes X_1\}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sym } \Psi_{115} -$ $-\sqrt{\frac{1}{3}} \text{Sym } \Psi_{124}$	$\frac{1}{2} N^+$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
Два декуплета барионов									
$\text{Sym} \{N'_{22} \otimes \Theta_{22}\}$	$\text{Sym } \Psi_{556}$	$-\frac{3}{2} \Sigma_8^-$	1	-1	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\text{Sym} \{N'_{22} \otimes \text{Sym } \Theta_{12}\}$	$\text{Sym } \Psi_{456}$	$-\frac{3}{2} \Sigma_8^0$	1	0	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\text{Sym} \{N'_{22} \otimes \Theta_{11}\}$	$\text{Sym } \Psi_{446}$	$-\frac{3}{2} \Sigma_8^+$	1	1	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\text{Sym} \{\text{Sym } N'_{12} \otimes \Theta_{22}\}$	$\text{Sym } \Psi_{256}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \Sigma_8^- +$ $+\sqrt{\frac{1}{3}} \Sigma_8^-$	1	-1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Продолжение таблицы 15.4

Вектор состояния в $SU(4)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Символ, Q, J_3	T	T_3	Y	N	N_3	S	S_3
Sym $\{\text{Sym } N'_{12} \otimes \text{Sym } \Theta_{12}\}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (\text{Sym } \Psi_{156} + \text{Sym } \Psi_{246})$	$\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} \Sigma_8^0 +$	1	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
		$+\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \Sigma_8^0$							$-\frac{1}{2}$
Sym $\{\text{Sym } N'_{12} \otimes \Theta_{11}\}$	Sym Ψ_{146}	$\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} \Sigma_8^+ +$	1	1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
		$+\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \Sigma^+$							$-\frac{1}{2}$
Sym $\{N'_{11} \otimes \Theta_3\}$	Sym Ψ_{126}	$\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \Sigma_8^+ +$	1	-1	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
		$+\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \Sigma^-$							$-\frac{1}{2}$
Sym $\{N'_{11} \otimes \text{Sym } \Theta_{12}\}$	Sym Ψ_{126}	$\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \Sigma_8^0 +$	1	0	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
		$+\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} \Sigma^0$							$-\frac{1}{2}$

Вектор состояния в $SU(4)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Символ, Q, J_3	T_3	Y	N_3	S	S_3
$\text{Sym}\{N'_{-1} \otimes \Theta_{11}\}$	$\text{Sym } \Psi_{116}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} \Sigma_8^+ +$ $+\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{2} \Sigma^+$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\text{Sym}\{(N'_{-2} - N'_{21}) \otimes$ $\otimes (\Theta_{12} - \Theta_{21})\}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (\text{Sym } \Psi_{156} -$ $- \text{Sym } \Psi_{240})$	$-\frac{1}{2} \Lambda^0$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\text{Sym}\{N_{22} \otimes \Theta_{11}\}$	$\text{Sym } \Psi_{353}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} \Sigma_8^- -$ $-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{2} \Sigma^-$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\text{Sym}\{N_{22} \otimes \text{Sym } \Theta_{12}\}$	$\text{Sym } \Psi_{345}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} \Sigma_8^0 -$ $-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{2} \Sigma^0$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Вектор состояния в SU(4)-базисе	Вектор состояния в SU(6)-базисе	Символ, Q, J _s	T	T _s	Y	N	N _s	S	S _s
Sym {N ₂₂ ⊗ θ ₁₁ }	Sym Ψ ₃₄₄	$\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \Sigma_8^+$ $-\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} \Sigma^+$	1	1	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Sym {Sym N ₁₂ ⊗ θ ₂₂ }	Sym Ψ ₂₃₆	$\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} \Sigma_8^-$ $-\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \Sigma^-$	1	-1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Sym {Sym N ₁₂ ⊗ ⊗ Sym θ ₁₃ }	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ (Sym Ψ ₁₃₆ + + Sym Ψ ₂₃₆)	$\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} \Sigma_8^0$ $-\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \Sigma^0$	1	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Sym {Sym N ₁₂ ⊗ θ ₁₁ }	Sym Ψ ₁₃₄	$\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} \Sigma_8^-$ $-\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \Sigma^+$	1	1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Sym {N ₁₁ ⊗ θ ₂₂ }	Sym Ψ ₂₂₃	$\frac{3}{2} \Sigma_8^-$	1	-1	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Вектор состояния в $SU(4)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Символ, Q, J_s	T	T_s	Y	N	N_s	S	S_s
$\text{Sym} \{N_{11} \otimes \text{Sym} \Theta_{12}\}$	$\text{Sym } Y_{123}$	$\frac{3}{2} \Sigma_8^0$	1	0	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\text{Sym} \{N_{11} \otimes \Theta_{11}\}$	$\text{Sym } Y_{113}$	$\frac{3}{2} \Sigma_8^+$	1	1	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\text{Sym} \{(N_{12} - N_{21}) \otimes (\Theta_{12} - \Theta_{21})\}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (\text{Sym } Y_{133} - \text{Sym } Y_{234})$	$\frac{1}{2} \Lambda^0$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Три квадруплета барионов									
$\text{Sym} (N_2^+ \otimes \Theta_2)$	$\text{Sym } Y_{566}$	$-\frac{3}{2} \Sigma_8^-$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1
$\text{Sym} (N_2^+ \otimes \Theta_1)$	$\text{Sym } Y_{466}$	$-\frac{3}{2} \Sigma_8^0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1
$\text{Sym} (N_1^+ \otimes \Theta_2)$	$\text{Sym } Y_{266}$	$\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} E_8} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} E_8}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-1

Вектор состояния в $SU(4)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Символ, Q, J_3	T_3	Y	N_3	S	S_3
$\text{Sym}(N'_1 \otimes \theta_1)$	$\text{Sym } Y_{166}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \Sigma_8^0 +$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1	-1
		$+\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} \Sigma^0$					
$\text{Sym}(N'_2 \otimes \theta_2)$	$\text{Sym } Y_{356}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} \Sigma_8^- -$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1	0
		$-\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \Sigma^-$					
$\text{Sym}(N'_2 \otimes \theta_1)$	$\text{Sym } Y_{346}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} \Sigma_8^0 -$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1	0
		$-\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \Sigma^0$					
$\text{Sym}(N'_1 \otimes \theta_2)$	$\text{Sym } Y_{236}$	$\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \Sigma_8^+ +$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1	0
		$+\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \Sigma^-$					

Вектор состояния в $SU(4)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Символ, Q, J_3	T_3	Y	N_3	S_3	S_3
$\text{Sym}(N'_1 \otimes \theta_1)$	$\text{Sym } Y_{136}$	$\sqrt{\frac{1}{2} \frac{2}{3}} \Sigma_8^0 + \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} \Sigma_8^0$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\text{Sym}(N_2 \otimes \theta_2)$	$\text{Sym } Y_{335}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} \Sigma_8^- - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{2} \Sigma_8^-$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
$\text{Sym}(N_2 \otimes \theta_1)$	$\text{Sym } Y_{334}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} \Sigma_8^0 - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{2} \Sigma_8^0$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
$\text{Sym}(N_1 \otimes \theta_2)$	$\text{Sym } Y_{233}$	$\frac{3}{2} \Sigma_8^-$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\text{Sym}(N_1 \otimes \theta_1)$	$\text{Sym } Y_{133}$	$\frac{3}{2} \Sigma_8^0$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Продолжение таблицы 15.4

Вектор состояния в $SU(4)$ -базисе	Вектор состояния в $SU(6)$ -базисе	Символ, Q, J_3	T	T_3	Y	N	N_3	S	S_3
Четыре синглета барионов									
	Ψ_{666}	$-\frac{3}{2} \Omega^-$	0	0	-2	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
	$\text{Sym } \Psi_{366}$	$-\frac{1}{2} \Omega^-$	0	0	-2	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	$\text{Sym } \Psi_{336}$	$\frac{1}{2} \Omega^-$	0	0	-2	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
	Ψ_{333}	$\frac{3}{2} \Omega^-$	0	0	-2	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

Значение Y для всех четырех синглетов равно -2 ; значения S_3 , соответственно, $-3/2$, $-1/2$, $1/2$, $3/2$. Синглеты обычным образом связаны операторами S_+ , S_- :

$$\begin{aligned} S_- \Psi_{666} &= 0, S_+ \Psi_{666} = \sqrt{3} \text{Sym } \Psi_{366}, \\ S_+ \text{Sym } \Psi_{366} &= 2 \text{Sym } \Psi_{336}, S_+ \text{Sym } \Psi_{336} = \sqrt{3} \Psi_{333}, \\ S_+ \Psi_{333} &= 0. \end{aligned} \quad (15.2.60)$$

Так как сумма размерностей $1 \cdot 20 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 56$, $SU(4)$ -редукция 56-плета завершена, и все W -мультиплеты разложены на изотопические мультиплеты. Однозначность разложения проверяется так же, как и в предыдущих случаях.

Переходя с помощью формулы (15.2.4) к базисным векторам Ψ_{ABC} , мы получаем таблицу 15.4, в которой символы частиц или их линейные комбинации получаются так же, как в соответствующей таблице 35-плета.

§ 15.3. Другие гипермультиплеты

Из других, не рассмотренных здесь подробно, неприводимых представлений группы $SU(6)$, по-видимому, могут приобрести значения для классификации адронов 20-рядное и 70-рядное представления (см. (14.1.10), (14.1.12)).

Как мы уже отмечали, соответствующие гипермультиплеты еще не заполнены известными частицами, хотя и имеется несколько вероятных «кандидатов» в них. Поэтому мы не включили в эту книгу редукции 20-плета и 70-плета.

Существует одна частица — χ -мезон с массой 962, со спином 0, с нулевым зарядом, четностью минус, которая занимает изолированное положение, не входя ни в один известный изотопический мультиплет. Не удастся подобрать также никакого октета мезонов, в котором χ -мезон играл бы роль синглета. Возникает предположение, что χ -мезон является синглетом $SU(6)$ -теории.

Отметим в заключение, что все известные адроны укладываются в $SU(6)$ -классификацию по мере обнаружения их «партнеров» по мультиплетам.

МАГНИТНЫЕ МОМЕНТЫ И ГИПЕРМОМЕНТЫ

§ 16.1. Определения момента и гипермомента адрона

Мы ввели операторы момента μ_3 и гипермомента ν_3 в качестве основных наблюдаемых $SU(6)/SU(3)$ -теории (см. (13.2.33)). Однако векторы состояния элементарных частиц были определены с помощью процедуры, совершенно не зависевшей от μ_3 и ν_3 : мы требовали, чтобы эти векторы состояния были собственными векторами операторов заряда Q , гиперзаряда Y и проекции спина J_3 , т. е. трех остальных наблюдаемых $SU(3)$ -редукции, и чтобы эти векторы были связаны между собой действием операторов изоспина T_+ , T_- и спина J_+ , J_- . Последнее условие необходимо для того, чтобы можно было разбить каждый гипермультиплет на семейства частиц с определенными спиновыми характеристиками, а затем выделить изотопические мультиплеты. И то, и другое подсказывается опытом, так как наблюдаемые на опыте частицы всегда находятся в некотором спиновом состоянии и образуют семейства частиц, различающихся только этим состоянием (на традиционном языке говорят об *одной* частице в разных спиновых состояниях), а по признаку близости масс естественно группируются в изотопические мультиплеты.)

При этом, как мы видели, по крайней мере в случае простейших гипермультиплетов векторы состояния находятся однозначно; во всяком случае, мы не можем потребовать добавочно, чтобы векторы состояния элементарных частиц были еще собственными векторами операторов μ_3 , ν_3 . Поэтому мы назовем магнитным моментом (соответственно, гипермоментом) $SU(6)/SU(3)$ -частицы среднее значение оператора μ_3 (соответственно, ν_3) для

нормированного вектора состояния гипермультиплетта, соответствующего этой частице, определяемое с точностью до множителя, зависящего лишь от гипермультиплетта.

Среднее значение понимается в обычном применяемом в квантовой механике смысле: в пространстве гипермультиплетта существует скалярное произведение $(\Psi | X)$, и средним значением эрмитова оператора A для вектора Ψ называется число

$$(\Psi | A | \Psi) = (A\Psi | \Psi) = (\Psi | A\Psi). \quad (16.1.1)$$

Моменты частиц, принадлежащих разным гипермультиплеттам, в $SU(6)$ -теории принципиально несравнимы, так как соответствующие гипермультиплеттам множители пропорциональности не могут быть получены из этой теории. Теория не дает абсолютных значений моментов частиц, а только отношения моментов для частиц одного и того же гипермультиплетта. Для простоты мы полагаем в дальнейших вычислениях множители пропорциональности в приведенном выше определении равными единице. Тогда для любого гипермультиплетта операторы, представляющие μ_3 , ν_3 , выражаются через диагональные операторы Окубо того же представления (см. (13.2.33)):

$$\left. \begin{aligned} \mu_3 &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}_1^1 - \mathbf{A}_4^4) - \frac{1}{3}(\mathbf{A}_1^1 + \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_3^3) = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}_1^1 - \mathbf{A}_4^4) - \frac{1}{3}J_3, \\ \nu_3 &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}_6^6 - \mathbf{A}_3^3) + \frac{1}{3}(\mathbf{A}_1^1 + \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_3^3) = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}_6^6 - \mathbf{A}_3^3) + \frac{1}{3}J_3. \end{aligned} \right\} \quad (16.1.2)$$

Средние значения операторов обладают свойствами

$$\begin{aligned} (\Psi | A + B | \Psi) &= (\Psi | A | \Psi) + (\Psi | B | \Psi), \\ (\Psi | \lambda A | \Psi) &= \lambda(\Psi | A | \Psi). \end{aligned} \quad (16.1.3)$$

Так как векторы состояния $SU(6)/SU(3)$ -частиц являются собственными векторами J_3 , причем собственные значения J_3 равны средним значениям J_3 для нормированных векторов состояния, то достаточно вычислить для век-

торов состояния частиц средние значения $\mathbf{A}_1^1 - \mathbf{A}_4^4$, $\mathbf{A}_6^6 - \mathbf{A}_3^3$: для каждой частицы с вектором состояния Ψ

$$\left. \begin{aligned} (\Psi | \mu_3 | \Psi) &= \frac{1}{2} (\Psi | \mathbf{A}_1^1 - \mathbf{A}_4^4 | \Psi) - \frac{1}{3} J_3, \\ (\Psi | \nu_3 | \Psi) &= \frac{1}{2} (\Psi | \mathbf{A}_6^6 - \mathbf{A}_3^3 | \Psi) + \frac{1}{3} J_3. \end{aligned} \right\} (16.1.4)$$

Итак, дело сводится к вычислению средних значений диагональных операторов Окубо. Как мы знаем, базисные тензоры любого тензорного представления группы $SU(6)$ являются собственными векторами этих операторов, причем соответствующие собственные значения находятся по формуле (5.3.26). Таким образом, для базисных тензоров Ψ искомые средние могут быть найдены без труда. Векторы состояния частиц линейно выражаются через базисные тензоры. Пусть вообще нормированный вектор

$$\Psi = c^k \Psi_k, \quad (16.1.5)$$

где Ψ_k — базисные тензоры. Тогда, обозначая через λ_k^A собственные значения \mathbf{A}_A^A , имеем:

$$\begin{aligned} (\Psi | \mathbf{A}_A^A | \Psi) &= \bar{c}^k c^l (\Psi_k | \mathbf{A}_A^A | \Psi_l) = \bar{c}^k c^l (\Psi_k | \lambda_l^A \Psi_l) = \\ &= \sum_l \bar{c}^k c^l (\Psi_k | \lambda_l^A \Psi_l) = \sum_l \lambda_l^A \bar{c}^k c^l \delta_{kl} = \sum_k |c_k|^2 \lambda_k^A \quad (\text{н. с. по } A). \end{aligned} \quad (16.1.6)$$

Пользуясь составленными в главе 15 таблицами векторов состояния, где явно указаны все коэффициенты c^k для 35-плета и 56-плета, нетрудно найти для всех частиц этих гипермультиплетов средние значения $\mathbf{A}_1^1 - \mathbf{A}_4^4$, $\mathbf{A}_6^6 - \mathbf{A}_3^3$, а затем, по формуле (16.1.4), средние значения μ_3, ν_3 .

Заметим, что магнитный момент и гипермомент, по существу, связаны с $SU(3)$ -редукцией и не имеют прямого отношения к $SU(4)$ -редукции; в последней следует рассматривать нестранный и странный моменты μ_{N_3}, μ_{S_3} (13.3.26). Поскольку $S_3 + N_3 = J_3$ (13.3.25), а $T_3 = Q - \frac{1}{2} Y$, эти моменты связаны с μ_3, ν_3 простой

зависимостью:

$$\mu_{N_3} + \mu_{S_3} = \mu_3 - \frac{1}{2} \nu_3. \quad (16.1.7)$$

В случаях, когда $SU(3)$ -редукция не приводит к удовлетворительному описанию наблюдаемых частиц (например, для частиц ϕ , ω 35-плета), вычисляемые ниже значения моментов нуждаются в исправлении (ср. рассмотренные «смешения» в главе 18).

§ 16.2. Примеры вычисления магнитного момента и гипермомента

А. 35-плет мезонов

Согласно (5.3.28), в этом случае

$$\mathbf{A}_A^A \Psi_D^C = (\delta_D^A - \delta_A^C) \Psi_D^C \quad (\text{н. с.}), \quad (16.2.1)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} (\Psi_B^A | \mathbf{A}_1^1 - \mathbf{A}_4^4 | \Psi_B^A) &= \delta_B^1 - \delta_B^4 - \delta_1^A + \delta_4^A, \\ (\Psi_B^A | \mathbf{A}_6^6 - \mathbf{A}_3^3 | \Psi_B^A) &= \delta_B^6 - \delta_B^3 - \delta_6^A + \delta_3^A. \end{aligned} \right\} \quad (16.2.2)$$

Найденные по этим формулам средние значения можно расположить в виде таблиц, в которых вектору Ψ_B^A соответствует клетка в пересечении A -го столбца и B -й строки:

		$\mathbf{A}_1^1 - \mathbf{A}_4^4$					
		1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	2	1	1	
2	-1	0	0	1	0	0	
3	-1	0	0	1	0	0	
4	-2	-1	-1	0	-1	-1	
5	-1	0	0	1	0	0	
6	-1	0	0	1	0	0	

(16.2.3)

$$\mathbf{A}_6^6 - \mathbf{A}_3^3$$

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	0	0	-1
2	0	0	1	0	0	-1
3	-1	-1	0	-1	-1	-2
4	0	0	1	0	0	-1
5	0	0	1	0	0	-1
6	1	1	2	1	1	0

(16.2.4)

С помощью этих таблиц, формул (16.1.4) и таблицы 15.1 векторов состояний 35-плета в $SU(3)$ -редукции (§ 15.1, А) вычисляются приведенные ниже средние значения μ_3, ν_3 .

Таблица 16.1

Средние значения момента и гипермомента для 35-плета

Частица	μ_3	ν_3
κ^-	0	0
$\tilde{\kappa}^0$	0	0
π^-	0	0
π^0	0	0
π^+	0	0
η^0	0	0
κ^0	0	0
κ^+	0	0

Продолжение таблицы 16.1

Частица	μ_z	ν_z	Частица	μ_z	ν_z	Частица	μ_z	ν_z
$-1\chi^-$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$0\chi^-$	0	0	$1\chi^-$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
$-1\tilde{\chi}^0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$0\tilde{\chi}^0$	0	0	$1\tilde{\chi}^0$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$
$-1\rho^-$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$0\rho^-$	0	0	$1\rho^-$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$-1\rho^0$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$0\rho^0$	0	0	$1\rho^0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$-1\rho^+$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$0\rho^+$	0	0	$1\rho^+$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$-1\varphi^0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$0\varphi^0$	0	0	$1\varphi^0$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$
$-1\chi^0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$0\chi^0$	0	0	$1\chi^0$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$
$-1\chi^+$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$0\chi^+$	0	0	$1\chi^+$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
$-1\omega^0$	0	0	$0\omega^0$	0	0	$1\omega^0$	0	0

Б. 56-plet барионов

Согласно (5.3.26), в этом случае

$$\mathbf{A}_A^A \Psi_{CDE} = \left[n(A) - \frac{1}{2} \right] \Psi_{CDE} \quad (\text{н. с.}), \quad (16.2.5)$$

где $n(A)$ — число индексов Ψ_{CDE} , равных A . Отсюда

$$\left. \begin{aligned} (\Psi_{ABC} | \mathbf{A}_1^1 - \mathbf{A}_4^4 | \Psi_{ABC}) &= n(1) - n(4), \\ (\Psi_{ABC} | \mathbf{A}_6^6 - \mathbf{A}_3^3 | \Psi_{ABC}) &= n(6) - n(3). \end{aligned} \right\} \quad (16.2.6)$$

Найденные по этим формулам средние значения можно расположить в виде таблиц; мы приводим только те базисные тензоры, для которых среднее не равно нулю. K, L означают числа, не равные 1, 4 или, соответственно, 3, 6.

Ψ_{ABC}	$\mathbf{A}_1^1 - \mathbf{A}_4^4$	Ψ_{ABC}	$\mathbf{A}_6^6 - \mathbf{A}_3^3$
111	3	666	3
11K	2	66K	2
114	1	663	1
1KL	1	6KL	1
14K	0	63K	0
144	-1	633	-1
4KL	-1	3KL	-1
44K	-2	33K	-2
444	-3	333	-3

(16.2.7)

С помощью таблицы 15.3 векторов состояний 56-плета в $SU(3)$ -редукции (§ 15.2, A) можно теперь вычислить приведенные ниже средние значения μ_3, ν_3 (табл. 16.2.)

Отношение магнитных моментов нейтрона и протона измерено на опыте и оказалось равным $-0,68$, в соответствии с предыдущей таблицей. Объяснение отношения моментов является значительным достижением $SU(6)$ -теории. Аналогичные отношения $\frac{\mu_3(\Lambda)}{\mu_3(N^+)}, \frac{\mu_3(\Sigma^+)}{\mu_3(N^+)}$, в пределах погрешностей измерения, также согласуются с теорией.

Средние значения момента

Частица	μ_3	ν_3	Частица	μ_3	ν_3
$-\frac{3}{2} \Omega^-$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2} \Omega^-$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$-\frac{3}{2} \Xi_{\delta}^-$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \Xi_{\delta}^-$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$-\frac{3}{2} \Xi_{\delta}^0$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \Xi_{\delta}^0$	0	$\frac{1}{6}$
$-\frac{3}{2} \Sigma_{\delta}^-$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2} \Sigma_{\delta}^-$	$\frac{1}{6}$	0
$-\frac{3}{2} \Sigma_{\delta}^0$	0	0	$-\frac{1}{2} \Sigma_{\delta}^0$	0	0
$-\frac{3}{2} \Sigma_{\delta}^+$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2} \Sigma_{\delta}^+$	$-\frac{1}{6}$	0
$-\frac{3}{2} \Delta_{\delta}^-$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \Delta_{\delta}^-$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
$-\frac{3}{2} \Delta_{\delta}^0$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \Delta_{\delta}^0$	0	$-\frac{1}{6}$
$-\frac{3}{2} \Delta_{\delta}^+$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \Delta_{\delta}^+$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
$-\frac{3}{2} \Delta_{\delta}^{++}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \Delta_{\delta}^{++}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$

Таблица 16.2

и гипермомента для 56-плета

Частица	μ_s	ν_s	Частица	μ_s	ν_s
$\frac{1}{2} \Omega^-$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2} \Omega^-$	$-\frac{1}{2}$	-1
$\frac{1}{2} \Xi_8^-$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2} \Xi_8^-$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} \Xi_8^0$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2} \Xi_8^0$	0	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} \Sigma_8^-$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{3}{2} \Sigma_8^-$	$-\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2} \Sigma_8^0$	0	0	$\frac{3}{2} \Sigma_8^0$	0	0
$\frac{1}{2} \Sigma_8^+$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{3}{2} \Sigma_8^+$	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2} \Delta_8^-$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2} \Delta_8^-$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} \Delta_8^0$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2} \Delta_8^0$	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} \Delta_8^+$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2} \Delta_8^+$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} \Delta_8^{++}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2} \Delta_8^{++}$	1	$\frac{1}{2}$

Продолжение таблицы 16.2

Частица	μ_z	ν_z	Частица	μ_z	ν_z
$-\frac{1}{2} \Sigma^-$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \Sigma^-$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2} \Sigma^0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \Sigma^0$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2} \Sigma^-$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} \Sigma^-$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2} \Sigma^0$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} \Sigma^0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2} \Sigma^+$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} \Sigma^+$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2} \Lambda^0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} \Lambda^0$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2} N^0$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2} N^0$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
$-\frac{1}{2} N^+$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2} N^+$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

МАССОВЫЕ
ФОРМУЛЫ

ГЛАВА 17

МАССОВЫЕ ФОРМУЛЫ

В этой главе делаются новые физические предположения о природе «расщепления» адрона на элементарные частицы, из которых выводятся две формулы для масс этих частиц. Первая из них (Гелл-Манна — Окубо) относится к $SU(3)$ -теории и описывает распределение масс частиц супермультиплетета. В этой формуле каждый супермультиплет $SU(3)$ -теории рассматривается отдельно, так что, например, массы частиц октета барионов $F_{3/2}$ и декуплета барионов $F_{3/2}$ оказываются никак не связанными. С принципиальной стороны формула масс Гелл-Манна — Окубо аналогична описанию зееман-эффекта в атомных спектрах. Хотя такая аналогия и приводит к правильным результатам для масс элементарных частиц, она не вполне удовлетворительно обоснована, поскольку поле, расщепляющее адрон, конечно, не является «внешним» полем, подобным внешнему магнитному полю в случае зееман-эффекта. Следует, по-видимому, считать, что *это поле создается самим адроном, находящимся в состоянии, аналогичном атому с орбитальным вращением зарядов*. Такое описание расщепления адрона — по нашему мнению, более правильное — аналогично уже не зееман-эффекту, а *тонкой (и сверхтонкой) структуре* атомного спектра. Из этих представлений можно просто вывести известную формулу Бега и Синга, описывающую спектр масс частиц гипермультиплетета в $SU(6)$ -теории. Формула Гелл-Манна — Окубо следует из этой более общей формулы, по крайней мере, в случае 56-плета. Поле, расщепляющее адрон, мы называем *унитарным полем*. Как мы увидим, из сделанных предположений можно вывести некоторые заключения о строении этого поля.

§ 17.1. Возмущение оператора энергии магнитным полем

В главе 6 было изложено квантовомеханическое описание частицы, находящейся в заданном силовом поле; наличие этого поля учитывалось в формуле (6.3.1) с помощью члена $V\psi$, где V — оператор умножения волновой функции ψ на $V(x, y, z)$. Это выражение оператора энергии обычно применяется в случае электростатического поля, например кулонова поля, образованного ядром атома; системой с волновой функцией ψ является электрон этого атома.

Сложнее описывается частица в магнитном поле. Так как эта квантовомеханическая задача нужна нам лишь для построения, по аналогии, некоторых гипотез о более сложных полях, мы примем простейшие предположения: пусть магнитное поле однородно и настолько мало, что квадратом его величины можно пренебречь.

Релятивистское соотношение между массой и энергией. Напомним, что релятивистский 4-импульс свободной частицы связан с ее массой и скоростью соотношениями

$$p^k = \frac{mv^k}{\sqrt{1-v^2}} \quad (k = 1, 2, 3), \quad p^0 = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (17.1.1)$$

где $p^0 = H$ — энергия частицы, а скорость света принята за единицу; m здесь и в дальнейшем обозначает *массу покоя* частицы, и никакого другого понятия массы мы не рассматриваем.

Из (17.1.1) вытекает соотношение

$$m^2 = H^2 - p^2 = (p^0)^2 - \sum_{k=1}^3 (p^k)^2; \quad (17.1.2)$$

вводя принятое в физической литературе обозначение, запишем последнее выражение в виде «скалярного произведения»

$$m^2 = p^k p^k. \quad (17.1.3)$$

Исходные соотношения (17.1.1) имеют смысл лишь для частиц с положительной массой; для частиц нулевой массы $v = 1$ (скорость света), и правые части соотношений (17.1.1) теряют смысл. Тем не менее принимается, что и для этих

частиц импульс и энергия имеют конечные значения, удовлетворяющие соотношению (17.1.3).

Таким образом, (17.1.3) считается универсальным соотношением, которому подчиняются все существующие (свободные) частицы. Посмотрим теперь, как следует видоизменить соотношение (17.1.3) в случае, когда частица находится в электромагнитном поле. Начнем опять со случая $m > 0$. Тогда, как известно, полный импульс частицы \mathbf{p} в поле состоит из кинетического импульса $m\mathbf{v}/\sqrt{1-v^2}$ и потенциального импульса $e\mathbf{A}$, где \mathbf{A} — вектор-потенциал поля; аналогично полная энергия состоит из кинетической энергии $m/\sqrt{1-v^2}$ и потенциальной энергии eV , где e — заряд частицы, а V — скалярный потенциал. Из формул

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} + e\mathbf{A}, \quad H = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} + eV \quad (17.1.4)$$

можно исключить скорость v , что приводит к соотношению

$$(H - eV)^2 - (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 = m^2. \quad (17.1.5)$$

Это соотношение выведено для частиц с $m > 0$. Известные частицы нулевой массы не взаимодействуют с электромагнитным полем; в этом случае, однако, остается справедливой формула (17.1.2) с $m = 0$.

Напомним, каким образом из (17.1.5) получается выражение энергии в нерелятивистском приближении. Условие, при котором можно пользоваться нерелятивистским приближением, состоит в малости кинетического импульса по отношению к массе:

$$\frac{|\mathbf{p} - e\mathbf{A}|}{m} \ll 1. \quad (17.1.6)$$

Согласно (17.1.5), в этом случае

$$H - eV = [m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2]^{1/2} = m + \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + \dots \quad (17.1.7)$$

Отбрасывая малые высшего порядка, получаем нерелятивистское выражение энергии частицы:

$$H = m + eV + \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2, \quad (17.1.8)$$

Поскольку слагаемое m означает лишь сдвиг всех значений энергии на постоянную величину, при «квантовании» выражения (17.1.8) (т. е. при построении соответствующего оператора в квантовой механике) это слагаемое отбрасывают. Заменяя p_x, p_y, p_z на $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$ (ср. (6.3.2)), получают выражение оператора энергии частицы в электромагнитном поле:

$$H = eV + \frac{1}{2m} \sum \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} - eA_x \right)^2. \quad (17.1.9)$$

Вектор-потенциал A связан с магнитным полем \mathcal{H} соотношением

$$\mathcal{H} = \text{rot } A; \quad (17.1.10)$$

в случае однородного поля \mathcal{H} можно записать вектор-потенциал в виде

$$A = \frac{1}{2} [\mathcal{H}, r], \quad r = xi + yj + zk. \quad (17.1.11)$$

Поскольку в этом случае $\text{div } A = 0$, имеем $pA = = A p$, и если пренебречь квадратом \mathcal{H} , то (17.1.9) принимает вид

$$H = H_0 - \frac{e}{2m} \mathcal{H} [r, p], \quad H_0 = \frac{1}{2m} p^2 + eV. \quad (17.1.12)$$

Сравнение с (6.4.19) показывает, что

$$[r, p] = \hbar M, \quad (17.1.13)$$

где M — оператор механического момента частицы.

По аналогии с выражением энергии магнитного диполя множитель при \mathcal{H} в (17.1.12) называется *оператором магнитного момента* частицы. Мы видим, что операторы магнитного и механического момента пропорциональны.

Коэффициент пропорциональности $-e\hbar/2m$ меняется в зависимости от частицы. Операторы M_1, M_2, M_3 строятся на гильбертовом пространстве волновых функций с помощью представления U_g группы $SO(3)$ (см. § 6.4). На любом конечномерном собственном подпространстве

оператора H_0 (17.1.12) можно записать в виде

$$H = H_0 + H_1, \quad H_1 = -\frac{e\hbar}{2m} (A_1 \mathcal{H}^1 + A_2 \mathcal{H}^2 + A_3 \mathcal{H}^3), \quad (17.1.14)$$

где A_1, A_2, A_3 — представляющие операторы образующих алгебры Ли $ASO(3)$ (§ 6.4).

В $SU(2)$ -трактовке вектороператор A_γ (§ 5.4) должен быть заменен тензороператором Окубо a_β^α ($\alpha, \beta = 1, 2$). Тогда (17.1.14) принимает вид

$$H_1 = -\frac{e\hbar}{2m} a_\beta^\alpha \mathcal{H}_\alpha^\beta, \quad (17.1.15)$$

где a_β^α — операторы Окуба в соответствующем фиксированном собственном значению H_0 представлении группы $SU(2)$, а поле \mathcal{H}_α^β связано с \mathcal{H} соотношением (ср. (7.2.4))

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^1 &= \frac{1}{2} \mathcal{H}^3, & \mathcal{H}_1^2 &= \frac{1}{2} (\mathcal{H}^1 + i\mathcal{H}^2), \\ \mathcal{H}_2^1 &= \frac{1}{2} (\mathcal{H}^1 - i\mathcal{H}^2), & \mathcal{H}_2^2 &= -\frac{1}{2} \mathcal{H}^3. \end{aligned} \quad (17.1.16)$$

Введем для магнитного момента частицы обозначение

$$d_\beta^\alpha = -\frac{e\hbar}{2m} a_\beta^\alpha. \quad (17.1.17)$$

Тогда (17.1.15) записывается в виде

$$H_1 = d_\beta^\alpha \mathcal{H}_\alpha^\beta. \quad (17.1.18)$$

Проанализируем еще раз строение этой формулы, служащей отправной точкой для дальнейшего изложения. Рассматривается частица во внешнем поле. Все возможные состояния частицы (при фиксированном значении ее собственной энергии H_0) образуют конечномерное пространство $C(n)$, где действует неприводимое представление группы $SU(2)$ степени n . Это выражают коротко, говоря, что *частица имеет группу симметрии $SU(2)$* . Свойства частицы по отношению к внешнему полю описываются тензороператором d_β^α , задающим базис регулярного операторного представления $SU(2)$; каждый оператор d_β^α в выбран-

ном базисе $C(n)$ изображается некоторой n -рядной матрицей $(i | d_{\beta}^{\alpha} | j)$.

Таким образом, задание группы симметрии частицы и значения ее собственной энергии определяют строение тензороператора ее магнитного момента d_{β}^{α} . Тензорный закон свертывания в (17.1.18) определяет, далее, строение внешнего поля, взаимодействующего с частицей: поле задается скалярным тензором, принадлежащим пространству регулярного представления той же группы симметрии.

Из тензороператора момента частицы и тензора внешнего поля строится по формуле (17.1.18) оператор H_1 энергии взаимодействия частицы с внешним полем.

Наконец, момент d_{β}^{α} пропорционален (см. (17.1.17)) тензороператору Окубо a_{β}^{α} того же n -рядного представления группы симметрии $SU(2)$. Такова принципиальная сторона описания зееман-эффекта с принятой в настоящее время групповой точки зрения.

Предыдущие формулы применяются обычно к атому в некотором энергетическом состоянии. То обстоятельство, что группой симметрии является $SU(2)$, означает произвольную ориентацию орбитального момента по отношению к полю; это и естественно, поскольку поле — внешнее, а не создается орбитальным движением зарядов в атоме. Как будет показано ниже, группа симметрии, соответствующая тонкой структуре спектра, должна быть выбрана иначе (см. § 17.5).

§ 17.2. Унитарный момент и унитарное поле в $SU(3)$ -теории

В этом параграфе строится массовая формула $SU(3)$ -теории, исходя из аналогии с зееман-эффектом (§ 17.1). Как уже было отмечено во введении к этой главе, такая точка зрения не вполне удовлетворительна и будет заменена далее (в $SU(6)$ -трактовке) другой, построенной по аналогии с описанием тонкой структуры.

Вернемся к формуле (17.1.5). Перепишем ее в виде

$$m^2 = (p^k - \tilde{p}^k)(p^k - \tilde{p}^k), \quad (17.2.1)$$

где p^k — полный 4-импульс частицы, \tilde{p}^k — ее потенциаль-

ный импульс, а скалярное произведение определяется так же, как в (17.1.3). Раскроем скобки в (17.2.1) и предположим, что в полученной формуле можно пренебречь членом $\tilde{p}^k \tilde{p}^k$; это значит, что «внешнее поле» считается достаточно малым по сравнению с полным импульсом частицы. Тогда (17.2.1) принимает вид

$$m^2 = m_0^2 - (p^k \tilde{p}^k + \tilde{p}^k p^k), \quad m_0^2 = p^k p^k. \quad (17.2.2)$$

Полагая

$$\delta m^2 = - (p^k \tilde{p}^k + \tilde{p}^k p^k), \quad (17.2.3)$$

можно переписать (17.2.2) в виде

$$m^2 = m_0^2 + \delta m^2. \quad (17.2.4)$$

Заметим, что в правой части (17.2.3) стоят скалярные произведения в пространстве Минковского. Выражение массы (17.2.2) имеет формальное строение, сходное с выражением оператора энергии в квантовой механике; именно, в нерелятивистском приближении (17.1.9)

$$H = H_0 + H_1 = H_0 - \frac{1}{2m} (p^k \tilde{p}^k + \tilde{p}^k p^k), \quad (17.2.5)$$

с обычным скалярным произведением.

При этом, согласно (17.1.12), оператор H_0 симметричен относительно группы вращений $SO(3)$, а оператор H_1 имеет строение (17.1.18).

Окубо и Райян [8] предположили, что спектр масс частиц любого супермультиплетта $SU(3)$ -теории описывается формулой типа (17.2.2):

$$m^2 = m_0^2 + \delta m^2, \quad (17.2.6)$$

причем слагаемые обладают свойствами, аналогичными свойствам слагаемых (17.2.5); именно, оператор m_0^2 симметричен относительно группы $SU(3)$, а оператор δm^2 имеет выражение вида (17.1.18).

Таким образом, оператор квадрата массы (17.2.6) строится по аналогии с релятивистской формулой (это, как мы увидим, существенно для мезонов); члены же полученной формулы интерпретируются путем сравнения с нерелятивистским приближением.

Тем самым уже происхождение сделанных предположений указывает на характер выводимых из них массовых формул: это — *формулы нерелятивистской теории, но с релятивистской поправкой*, позволяющей лучше описать массы мезонов.

Если можно считать, что

$$\frac{\delta m^2}{m_0^2} \ll 1, \quad (17.2.7)$$

то в разложении

$$m = m_0 \left(1 + \frac{\delta m^2}{m_0^2} \right)^{1/2} = m_0 + \frac{1}{2m_0} \delta m^2 + \dots \quad (17.2.8)$$

можно сохранить лишь первые два члена:

$$m = m_0 + \frac{1}{2m_0} \delta m^2. \quad (17.2.9)$$

Как мы увидим, предположение (17.2.7) можно считать оправданным для барионов, но не для мезонов.

Фиксируем некоторый супермультиплет $SU(3)$ -теории, который для краткости мы будем называть просто «адроном». Всевозможные состояния адрона образуют некоторое пространство $C(n)$ неприводимого представления группы $SU(3)$ (в отличие от описания зееман-эффекта в конце § 17.1, n здесь не может быть произвольным, ср. (5.2.17)). Роль «момента» адрона играет некоторый тензор оператор D_b^a , принадлежащий регулярному представлению группы симметрии адрона $SU(3)$. Аналогично «внешнее поле» (мы назовем его Z_a^b) принадлежит регулярному представлению $SU(3)$. Все предыдущие аналогии можно резюмировать в виде следующих принципов (где слово «адрон» заменяет выражение «супермультиплет $SU(3)$ -теории»):

1. Адрону сопоставляется тензор оператор унитарного момента D_b^a , $a, b = 1, 2, 3$, принадлежащий регулярному операторному представлению группы $SU(3)$. При фиксированных a, b D_b^a есть оператор, действующий в пространстве состояний адрона (т. е. в пространстве неприводимого представления группы $SU(3)$, определяющего адрон).

II. Существует поле, взаимодействующее с адроном (мы называем его унитарным полем). Это поле есть тензор Z_a^b со скалярными компонентами, принадлежащий регулярному представлению группы $SU(3)$.

Мы не считаем при этом, что поле Z_a^b — одно и то же для всех супермультиплетов $SU(3)$ -теории; но, как мы увидим дальше, есть основания предполагать, что соответствующие разным супермультиплетам Z -поля отличаются лишь значениями двух действительных параметров.

III. На пространстве состояний адрона определен оператор квадрата массы m^2 , имеющий вид

$$m^2 = m_0^2 + D_b^a Z_a^b, \quad (17.2.10)$$

где m_0^2 — кратное единичного оператора.

m_0 зависит от выбранного супермультиплета и не предсказывается теорией. Естественно теперь считать, что элементарным частицам, входящим в супермультиплет, соответствуют векторы состояния адрона, являющиеся собственными векторами оператора m^2 ; тогда, беря корень из принадлежащих им собственных значений, можно приписать элементарным частицам определенные массы. Конечно, это определение понятия элементарной частицы как состояния, «чистого» по отношению к массе, не обязательно должно совпасть с определениями § 9.5, где требовалась «чистота» относительно заряда, гиперзаряда и т. п. Насколько совместимы эти требования, т. е. в каком отношении находится вводимое здесь новое определение элементарной частицы к предыдущему, будет исследовано ниже. Итак, мы приходим к следующему определению:

IV. Собственные векторы оператора m^2 образуют полную ортонормированную систему в пространстве состояний адрона. Корни из соответствующих собственных значений образуют спектр масс адрона, а собственные векторы взаимно однозначно соответствуют элементарным частицам с определенной массой.

Конечно, при этом может возникнуть необходимость в выборе собственных векторов в случае вырожденных собственных значений. Мы увидим, однако, что у интересующего нас оператора m^2 все собственные значения не вырождены.

При условии (17.2.7) можно заменить (17.2.10) аналогичной формулой для m , вытекающей из (17.2.9):

$$m = m_0 + D_b^a Z_a. \quad (17.2.11)$$

Теория не дает указаний, в каких случаях выполняется (17.2.7); однако по таблицам нетрудно проверить, что оно лучше выполняется для барионов, чем для мезонов. Поэтому не удивительно, что спектр масс барионов хорошо согласуется с обеими формулами (17.2.10), (17.2.11), а спектр масс мезонов — только с (17.2.10).

До сих пор мы ничего не знаем об унитарном моменте D_b^a и унитарном поле Z_a , кроме их тензорного строения.

Чтобы найти тензороператор момента D_b^a , следует принять во внимание соображения инвариантности по отношению к выбору координатной системы, уже отмеченные нами в § 5.4. При фиксированных a, b D_b^a является оператором, действующим в пространстве некоторого неприводимого представления группы $SU(3)$, например в $\text{Sym}^0(p, q)$. Чтобы задать этот оператор, необходимо указать его матричные элементы в некотором базисе этого пространства, т. е. $(i | D_b^a | k)$, где i, k пробегает столько значений, какова степень представления. Напомним теперь, что базисы во всех пространствах $\text{Sym}^0(p, q)$ определяются выбором базиса в $C(3)$ (ср. (3.2.1)) и что каждому базису в $C(3)$ соответствует система операторов D_b^a , в силу самого определения тензороператора. Пусть теперь другому базису в $C(3)$ соответствуют система операторов $D_b'^a$ и базис в пространстве $\text{Sym}^0(p, q)$, в котором $D_b'^a$ имеет матричные элементы $(i | D_b'^a | k)'$. Тогда задание операторов D_b^a должно быть осуществлено способом, не зависящим от выбора базиса; в противном случае D_b^a не могут быть использованы для описания физических свойств системы. А это значит, что для любых i, k, a, b должно быть

$$(i | D_b'^a | k)' = (i | D_b^a | k). \quad (17.2.12)$$

Следовательно, D_b^a должен быть инвариантным тензороператором (см. § 5.4) и поэтому должен удовлетворять

уравнению Окубо (5.4.12):

$$[D_b^a, A_d^c] = \delta_d^a D_b^c - \delta_b^c D_d^a. \quad (17.2.13)$$

Предположим, что решение уравнения (17.2.13) может быть представлено в виде (5.4.17). Тем самым тензор-оператор унитарного момента D_b^a выражается через операторы Окубо того же (определяющего данный супермультиплет) неприводимого представления $SU(3)$ с помощью операции тензорной алгебры, т. е. умножения и свертывания; чтобы обеспечить бесследность D_b^a , добавляется еще член вида $\lambda \delta_b^a \epsilon$, также содержащийся в (5.4.17):

$$D_b^a = \lambda \delta_b^a \epsilon + \mu A_b^a + \nu A_c^a A_b^c + \rho A_c^a A_d^c A_b^d + \dots, \quad (17.2.14)$$

где $\lambda, \mu, \nu, \rho, \dots$ — числовые коэффициенты.

Следует отметить, что в случае группы симметрии $SU(2)$ это обобщение не дает ничего нового. В самом деле, можно доказать, что операторы $a_\gamma^\alpha, a_\beta^\gamma, a_\gamma^\alpha a_\delta^\beta, \dots$, составленные из операторов Окубо *любого представления* $SU(2)$, линейно выражаются через операторы a_β^α и ϵ того же представления. Доказательство этого факта вполне аналогично рассуждениям, приводимым в § 17.3, и предоставляется читателю. В силу требования бесследности $d_\gamma^\gamma = 0$ единичный оператор при правильном выборе коэффициентов в (17.2.14) не может входить в окончательное выражение d_β^α , и дело сводится к пропорциональности типа (17.1.17).

Иначе обстоит дело в случае группы $SU(3)$; в этом случае, как и для рассматриваемой ниже группы $SU(6)$, для вывода массовых формул существенны по крайней мере квадратичные члены выражения (17.2.14).

Итак, мы приходим к следующему принципу:

V. Унитарный момент D_b^a алгебраически выражается через операторы Окубо A_b^a того же неприводимого представления группы $SU(3)$ по формуле (17.2.14).

Перейдем теперь к унитарному полю Z_a^b . Как мы видели, распределение масс в супермультиплете определяется преимущественно разложением на T -мультиплеты: если разбить супермультиплет на мультиплеты с помощью

выбранной в § 9.2 подгруппы $SU(2)$, соответствующей T -спину, то массы частиц одного мультиплетта значительно ближе друг к другу, чем массы частиц разных мультиплеттов. Пренебрежем сначала разбросом масс в пределах мультиплетта; тем самым мы допускаем, что операторы подгруппы $SU(2)$, действующей в пространстве мультиплетта, сохраняют массу частицы. Но тогда оператор m^2 должен быть перестановочен со всеми операторами a_β^α подалгебры $ASU(2)$ (§ 9.2). Из операторов A_b^a , входящих во второе слагаемое (17.2.14), только A_3^3 обладает этим свойством.

Выражая a_β^α через A_k^i и пользуясь тем, что свертки $L_b^a = A_c^a A_b^c$ удовлетворяют уравнению Окубо (5.4.12), нетрудно проверить, что из операторов $A_c^a A_b^c$ перестановочен со всеми a_β^α только $A_3^a A_3^c$. Дальнейшие члены в полиноме (17.2.14), как мы покажем (математически) в § 17.3, могут быть линейно выражены через предыдущие. Так как $Z_c^c = 0$, свертывание D_b^a с Z_a^b (17.2.10) должно привести к выражению вида

$$\delta m^2 = \xi A_3^3 + \eta A_3^3 A_3^c. \quad (17.2.15)$$

Поэтому в приближении, в котором мы работаем, следует положить все недиагональные компоненты Z_a^b в (17.2.10) равными нулю. Что касается диагональных компонент, то, в силу неприводимости представления Z_a^b , должно быть

$$Z_1^1 + Z_2^2 + Z_3^3 = 0. \quad (17.2.16)$$

Положим

$$\sigma = Z_1^1 + 1/2 Z_3^3, \quad \tau = Z_2^2 + 1/2 Z_3^3.$$

Введем тензор

$$\tilde{Z} = \begin{bmatrix} -1/2 Z_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 Z_3^3 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3^3 \end{bmatrix}. \quad (17.2.17)$$

Тогда

$$\delta m^2 = D_b^a Z_a^b = D_b^a \tilde{Z}_a^b + \sigma D_1^1 + \tau D_2^2.$$

В силу бесследности D_b^a свертка не изменится, если прибавить ко всем диагональным элементам \tilde{Z} слагаемое $1/2 Z_3^3$. Следовательно,

$$D_b^a \tilde{Z}_a^b = 3/2 D_3^3 Z_3^3,$$

откуда

$$\delta m^2 = 3/2 D_3^3 Z_3^3 + \sigma D_1^1 + \tau D_2^2. \quad (17.2.18)$$

Но это выражение имеет форму (17.2.15) лишь при $\sigma = \tau = 0$, откуда $Z_1^1 = Z_2^2 = -1/2 Z_3^3$, в соответствии с требованием бесследности Z_a^b (17.2.16).

Таким образом, поле, расщепляющее адрон на изотопические мультиплеты, должно иметь вид

$$Z = C \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{bmatrix}, \quad (17.2.19)$$

где C — постоянная.

Отметим, что матрица этого поля совпадает, с точностью до множителя, с матрицей $-A_3^3$ оператора гиперзаряда в $SU(3)$ -теории. Каков бы ни был смысл этого совпадения, ясно, что поле (17.2.19) вызывает расщепление супермультиплета на мультиплеты с разными значениями гиперзаряда Y . Так как адрон имеет два заряда, естественно предположить, что за зарядовое расщепление T -мультиплетов ответственна другая часть Z -поля, построенная аналогично (17.2.19), но связанная с U -спином, поскольку заряд Q сохраняет постоянное значение на U -мультиплетах.

Руководствуясь этой аналогией, можно предположить, что соответствующая добавка к оператору m^2 имеет вид

$$\delta m^{2'} = \xi' A_1^1 + \eta' A_c^1 A_1^c. \quad (17.2.20)$$

Соответствующее слагаемое поля, аналогичное (17.2.19), должно иметь вид

$$Z' = C' \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}. \quad (17.2.21)$$

Матрица в (17.2.21) отличается лишь множителем от матрицы A_1^1 оператора заряда Q в $SU(3)$ -теории.

Так как зарядовое расщепление массы много меньше гиперзарядового, естественно считать, что слагаемое поля $Z' \ll Z$. Обозначая полное унитарное поле снова через Z , мы приходим к следующему заключению:

VI. Унитарное поле имеет вид

$$Z = C \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{bmatrix} + C' \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}, \quad (17.2.22)$$

где $C' \ll C$.

Теперь, отвлекаясь от предыдущих эвристических соображений, мы примем (17.2.22) за тензор унитарного поля в (17.2.10); мы можем снова воспользоваться бесследностью D_b^a и заменить этот тензор матрицей $\tilde{Z}_a^b = Z_a^b + \delta_a^b \cdot \text{const}$, у которой отличны от нуля лишь элементы $\tilde{Z}_1^1, \tilde{Z}_3^3$, причем $\tilde{Z}_1^1 \ll \tilde{Z}_3^3$. (Подчеркнем, что это лишь вычислительный прием; матрица \tilde{Z} не бесследна, и поэтому не рассматривается как поле.) Мы приходим к окончательному выражению оператора m^2 :

$$\text{VII.} \quad \left. \begin{aligned} m^2 &= m_0^2 + \delta m^2 + \delta m'^2, \\ \delta m^2 &= \xi A_3^3 + \eta A_c^3 A_3^c, \\ \delta m'^2 &= \xi' A_1^1 + \eta' A_c^1 A_1^c, \end{aligned} \right\} \quad (17.2.23)$$

где коэффициенты ξ', η' пропорциональны ξ, η :

$$\xi' = \vartheta \xi, \eta' = \vartheta \eta, |\vartheta| \ll 1. \quad (17.2.24)$$

Заметим, что пропорциональность коэффициентов в (17.2.24) не согласуется с опытными значениями масс, что может быть объяснено в $SU(6)$ -теории (см. § 18.3).

Сформулированные выше принципы I—VII достаточны для вывода массовой формулы Гелл-Манна — Окубо, к которому мы и перейдем в § 17.4, после изложения необходимых математических сведений в § 17.3.

Вернемся, в заключение, к обоснованию $SU(3)$ -теории (или, точнее, классификации частиц с помощью груп-

пы $SU(3)$) в § 9.1. Там предполагалось, что расщепление «первичного адрона» на супермультиплеты происходит под действием некоторого неизвестного поля, по аналогии с расщеплением энергетических уровней атома в сферически симметричном электрическом поле. Пространство состояний супермультиплета рассматривалось по аналогии с собственным подпространством оператора энергии H , а операторы соответствующего представления алгебры Ли $ASU(3)$ — по аналогии с операторами момента M_x, M_y, M_z .

В этом параграфе делается следующий шаг, соответствующий «магнитному» члену энергии H_1 в формуле (17.1.14) (тогда как оператор энергии, расщепляющий адрон на супермультиплеты, аналогичен члену H_0 той же формулы).

Как легко проверить, оператор массы (17.2.23) перестановочен с операторами Q, Y . Поэтому векторы состояний с определенным значением массы имеют одновременно определенные значения заряда и гиперзаряда.

Этим устанавливается связь с классификацией адронов в главе 9 (подробное обсуждение этой связи см. в § 18.1).

§ 17.3. Свертки Окубо и операторы Казимира группы $SU(3)$

Мы рассматриваем фиксированное представление степени N , соответствующее некоторому супермультиплету. Для краткости условимся писать δ_b^a вместо $\delta_b^a \in(N)$, A_b^a — вместо $A_b^a(N)$. Формула (17.2.14) требует изучения операторов

$$\left. \begin{aligned} C_b^a(0) &= \delta_b^a, \\ C_b^a(1) &= A_b^a, \\ C_b^a(2) &= A_c^a A_b^c, \\ &\dots \dots \dots \\ C_b^a(n+1) &= A_{c_1}^a A_{c_2}^{c_1} \dots A_b^{c_n}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (17.3.1)$$

Дальнейшее свертывание по индексам a и b приводит к операторам Казимира представления $\text{Sym}^0(p, q)$ группы $SU(3)$:

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \delta_c^c = 3\epsilon(N), \\ C_1 &= A_c^c = 0, \\ C_2 &= A_d^c A_c^d, \\ C_3 &= A_d^c A_e^d A_c^e, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (17.3.2)$$

Мы сейчас докажем, что операторы Казимира произвольного представления кратны тождественному оператору:

$$C_n = c_n \epsilon(N), \quad (17.3.3)$$

где коэффициенты c_n зависят от выбора представления, т. е. от чисел p, q . (17.3.3) будет вытекать из леммы Шура, которую мы здесь не будем доказывать, но приведем в интересующем нас частном случае:

Пусть \mathbf{P} — неприводимое представление алгебры Ли \mathbf{A} с образующими A_i . Тогда оператор, действующий в пространстве представления и перестановочный со всеми операторами A_i , кратен тождественному.

Остается, следовательно, доказать, что операторы Казимира перестановочны с операторами Окубо A_d^c . Проще всего это сделать с помощью уравнения Окубо (5.4.12). Как было показано в § 5.4, все операторы (17.3.1) удовлетворяют уравнению Окубо. Полагая в полученных тождествах $a = b$ и суммируя по b , замечаем, что их правые части обращаются в нуль, откуда и следует перестановочность C_n с A_d^c .

Теперь мы докажем, что операторы $C_b^a(n)$ при $n \geq 3$ линейно выражаются через $C_b^a(0)$, $C_b^a(1)$, $C_b^a(2)$, а C_n при $n \geq 4$ линейно выражаются через C_2 , C_3 с коэффициентами, не зависящими от выбора представления.

Для этого нам понадобятся определители, составленные из операторов. Поскольку операторы, вообще говоря, не коммутируют между собой, не все определения опреде-

лителя оказываются в этом случае равносильными. Поэтому мы условимся определять определитель индукцией по числу рядов с помощью разложения по элементам первой строки, записывая всегда элементы этой строки в виде левых сомножителей при минорах.

Легко доказывается (также с помощью индукции), что такие определители обладают следующими обычными свойствами: они линейно зависят от каждого из столбцов и равны нулю (нулевому оператору), когда два столбца совпадают.

Рассмотрим определитель

$$O_{iklm}^{abcd} = \begin{vmatrix} A_i^a & A_i^b & A_i^c & A_i^d \\ A_k^a & A_k^b & A_k^c & A_k^d \\ A_l^a & A_l^b & A_l^c & A_l^d \\ \delta_m^a & \delta_m^b & \delta_m^c & \delta_m^d \end{vmatrix}. \quad (17.3.4)$$

Поскольку каждый из индексов пробегает здесь значения 1, 2, 3, то по крайней мере два из чисел a, b, c, d совпадают, так что O_{iklm}^{abcd} имеет два равных столбца и, следовательно, равен нулю.

Умножая (17.3.4) на $\delta_b^i \delta_c^k \delta_d^l$ и свертывая по b, c, d, i, k, l , имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} A_i^a & 0 & A_i^k & A_i^l \\ A_k^a & A_k^i & 0 & A_k^l \\ A_l^a & A_l^i & A_l^k & 0 \\ \delta_m^a & \delta_m^i & \delta_m^k & \delta_m^l \end{vmatrix} = \\ &= A_i^a \begin{vmatrix} A_k^i & 0 & A_l^l \\ A_l^i & A_l^k & 0 \\ \delta_m^i & \delta_m^k & \delta_m^l \end{vmatrix} + A_i^k \begin{vmatrix} A_k^a & A_k^i & A_k^l \\ A_l^a & A_l^i & 0 \\ \delta_m^a & \delta_m^i & \delta_m^l \end{vmatrix} - A_i^l \begin{vmatrix} A_k^a & A_k^i & 0 \\ A_l^a & A_l^i & A_l^k \\ \delta_m^a & \delta_m^i & \delta_m^k \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (17.3.5)$$

Разлагая, далее, определители правой части по строкам, пользуясь затем перестановочными соотношениями для операторов Окубо (4.5.7) и только что доказанной

перестановочностью операторов Казимира с операторами Окубо, получаем после длинных, но несложных вычислений:

$$6C_m^a(3) + 18C_m^a(2) + (12 - 3C_2)C_m^a(1) - (2C_3 + 6C_2)C_m^a(0) = 0. \quad (17.3.6)$$

Умножая (17.3.6) справа на $C_b^m(n)$ и суммируя по m , имеем:

$$6C_b^a(n+3) + 18C_b^a(n+2) + (12 - 3C_2)C_b^a(n+1) - (2C_3 + 6C_2)C_b^a(n) = 0. \quad (17.3.7)$$

Наконец, умножая (17.3.7) на δ_a^b и свертывая, находим:

$$6C_{n+3} + 18C_{n+2} + (12 - 3C_2)C_{n+1} - (2C_3 + 6C_2)C_n = 0. \quad (17.3.8)$$

Из (17.3.7) видно, что все операторы $C_b^a(n)$ выражаются через $C_b^a(0)$, $C_b^a(1)$ и $C_b^a(2)$; следовательно, оператор унитарного момента D_b^a имеет вид (ср. (17.2.14))

$$D_b^a = a_0(C_2, C_3)C_b^a(0) + a_1(C_2, C_3)C_b^a(1) + a_2(C_2, C_3)C_b^a(2), \quad (17.3.9)$$

где полиномы $a_j(x, y)$ ($j = 0, 1, 2$) зависят от выбора представления, поскольку коэффициенты (17.2.14) считаются зависящими от представления. Что касается операторов Казимира C_2, C_3 , то они также зависят от представления (все остальные операторы Казимира, в силу (17.3.8), выражаются через C_2, C_3). Можно показать, что для представления $\text{Sym}^0(p, q)$

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= \left[\frac{2}{3}(p^2 + q^2 + pq) + 2(p + q) \right] \epsilon(N), \\ C_3 &= \left\{ 2(p - q) \left[\frac{2}{9}(p + q)^2 + \frac{1}{9}pq + p + q + 1 \right] - \right. \\ &\quad \left. - (p^2 + q^2 + pq) - 3(p + q) \right\} \epsilon(N), \\ N &= N(p, q) = \frac{1}{2}(p + 1)(q + 1)(p + q + 2). \end{aligned} \right\} \quad (17.3.10)$$

Так как коэффициенты в (17.2.14) неизвестны, то неизвестен и вид полиномов $a_j(x, y)$; единственное, чем мы будем в дальнейшем пользоваться, это характер зависимости D_b^a от операторов Окубо:

$$D_b^a = a_0 \delta_b^a + a_1 A_b^a + a_2 A_c^a A_b^c. \quad (17.3.11)$$

§ 17.4. Формула масс в $SU(3)$ -теории

Результаты § 17.3 позволяют сохранить в выражении унитарного момента (17.2.14) только первые три члена. Этим обосновывается выражение (17.2.23) оператора m^2 . Это выражение можно преобразовать к удобному для применения виду, выразив m^2 через операторы заряда, гиперзаряда, T -спина и U -спина.

Преобразуем сначала квадратичный член формулы (17.2.23). С помощью антикоммутатора двух операторов $\{A, B\} = AB + BA$ и оператора Казимира C_2 (§ 17.3) этот член представляется в виде

$$\begin{aligned} A_c^3 A_3^c &= \frac{1}{2} \{A_c^3, A_3^c\} + \frac{1}{2} [A_c^3, A_3^c] = \\ &= \frac{1}{2} \{A_c^3, A_3^c\} + \frac{1}{2} (A_c^c - 3A_3^3) = \\ &= \frac{1}{2} [\{A_c^3, A_3^c\} - C_2] + \frac{1}{2} C_2 - \frac{3}{2} A_3^3 = \\ &= \frac{1}{2} (A_3^c A_c^3 + A_c^3 A_3^c - A_c^c A_c^c) + \frac{1}{2} C_2 - \frac{3}{2} A_3^3 = \\ &= \frac{1}{2} (A_3^3 A_3^3 - A_{\bar{d}}^{\bar{c}} A_{\bar{c}}^{\bar{d}}) + \frac{1}{2} C_2 - \frac{3}{2} A_3^3, \end{aligned} \quad (17.4.1)$$

где индексы \bar{c}, \bar{d} пробегают значения 1, 2. $A_3^3 = -Y$; что же касается свертки $A_{\bar{d}}^{\bar{c}} A_{\bar{c}}^{\bar{d}}$, то она может быть выражена через операторы изоспина. В самом деле, согласно (9.2.2),

$$T_{\bar{d}}^{\bar{c}} T_{\bar{c}}^{\bar{d}} = \left(A_{\bar{d}}^{\bar{c}} - \frac{1}{2} \delta_{\bar{d}}^{\bar{c}} A_{\bar{k}}^{\bar{k}} \right) \left(A_{\bar{c}}^{\bar{d}} - \frac{1}{2} \delta_{\bar{c}}^{\bar{d}} A_{\bar{l}}^{\bar{l}} \right) = A_{\bar{d}}^{\bar{c}} A_{\bar{c}}^{\bar{d}} - \frac{1}{2} Y^2. \quad (17.4.2)$$

С другой стороны, определим оператор

$$T(T+1) = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = \frac{1}{2} T_{\bar{d}}^{\bar{c}} T_{\bar{c}}^{\bar{d}} \quad (17.4.3)$$

(ср. (6.5.19)). Подчеркнем, что мы не определяем оператор T в отдельности; левая часть (17.4.3), по определению, равна правой, а смысл обозначения оператора в виде $T(T+1)$ состоит в том, что для вектора состояния x , принадлежащего подпространству изотопического мультиплетта со значением изоспина T ,

$$(T_1^2 + T_2^2 + T_3^2)x = T(T+1)x. \quad (17.4.4)$$

Согласно (17.4.2) и (17.4.3), правая часть (17.4.1) принимает вид

$$A_c^3 A_3^c = \frac{1}{2} C_2 + \frac{3}{2} Y + \left[\frac{1}{4} Y^2 - T(T+1) \right]. \quad (17.4.5)$$

Вычислим теперь по формуле (17.2.23) оператор гиперзарядового расщепления массы:

$$\delta m^2 = \frac{1}{2} \eta C_2 + \left(\frac{3}{2} \eta - \xi \right) Y + \eta \left[\frac{1}{4} Y^2 - T(T+1) \right]. \quad (17.4.6)$$

Совершенно аналогично вычисляется оператор зарядового расщепления $\delta m^{2'}$, с заменой оператора Y на $-Q$ и операторов T -спина операторами U -спина:

$$\delta m^{2'} = \frac{1}{2} \eta' C_2 - \left(\frac{3}{2} \eta' - \xi' \right) Q + \eta' \left[\frac{1}{4} Q^2 - U(U+1) \right]. \quad (17.4.7)$$

Вводя в (17.2.23) новые обозначения для коэффициентов, имеем:

$$m^2 = m_0^2 + \alpha + \beta Y + \gamma \left[T(T+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right] + \alpha' - \beta' Q + \gamma' \left[U(U+1) - \frac{1}{4} Q^2 \right]. \quad (17.4.8)$$

Это и есть формула масс Гелл-Манна — Окубо. Из нашего вывода следует, что коэффициенты должны быть связаны соотношениями:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} = \theta, \quad |\theta| \ll 1 \quad (17.4.9)$$

(по этому поводу см. пояснение к (17.2.24)). В случае, когда выполнено условие (17.2.7), можно пользоваться вместо оператора (17.2.10) оператором (17.2.11). Тогда, повторяя те же рассуждения, получаем вместо (17.4.8) формулу

$$m = m_0 + \alpha + \beta Y + \gamma \left[T(T+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right] + \alpha' - \beta' Q + \gamma' \left[U(U+1) - \frac{1}{4} Q^2 \right]. \quad (17.4.10)$$

Проиллюстрируем на примерах применение формул (17.4.8), (17.4.10) к простейшим супермультиплетам.

A. Гиперзарядовое расщепление супермультиплетов

Мы изучим сначала расщепление супермультиплетов на мультиплеты, вызванное полем (17.2.19).

Октет барионов $F_{1/2}$. В этом случае можно воспользоваться линейной формулой (17.4.10); отбрасывая члены с α' , β' , γ' , имеем

$$m = m_0 + \alpha + \beta Y + \gamma \left[T(T+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right]. \quad (17.4.11)$$

Поскольку мы пренебрегаем расщеплением внутри мультиплетов, обозначим мультиплеты таблицы 10.1 из § 10.1, для краткости, через Ξ , Σ , Λ , N . Тогда из (17.4.11) получаются массы частиц, указанные в следующей таблице:

	T	Y	$m_{\text{эксп}}$	$m_{\text{теор.}}$
Ξ	$\frac{1}{2}$	-1	1318	$m_0 + \alpha - \beta + \frac{1}{2}\gamma$
Σ	1	0	1192	$m_0 + \alpha + 2\gamma$
Λ	0	0	1115	$m_0 + \alpha$
N	$\frac{1}{2}$	1	939	$m_0 + \alpha + \beta + \frac{1}{2}\gamma$

(17.4.12)

Исключая неизвестные параметры, можно получить

соотношение между массами:

$$m_{\Xi} + m_N = 2m_0 + 2\alpha + \gamma = \frac{3}{2}m_{\Lambda} + \frac{1}{2}m_{\Sigma},$$

$$m_{\Xi} + m_N = \frac{1}{2}(3m_{\Lambda} + m_{\Sigma}). \quad (17.4.13)$$

Если бы мы воспользовались квадратичной формулой (17.4.8), то получили бы соотношение

$$m_{\Xi}^2 + m_N^2 = \frac{1}{2}(3m_{\Lambda}^2 + m_{\Sigma}^2). \quad (17.4.14)$$

Вычисляя m_{Ξ} через m_N , m_{Λ} , m_{Σ} по формуле (17.4.13), получаем 1330, тогда как формула (17.4.14) дает 1301. Эти значения отличаются от экспериментального значения $m_{\Xi} = 1318$ менее чем на 1,5%.

Декуплет барионов $F_{3/2}$. Как показывает таблица 10.3 из § 10.2, декуплет удовлетворяет следующему условию (вообще неверному для супермультиплетов!): для всех векторов T -базиса

$$\delta = T - \frac{1}{2}Y = \text{const.} \quad (17.4.15)$$

Для декуплета эта постоянная есть единица.

Так как

$$T(T+1) - \frac{1}{4}Y^2 = \left(\frac{1}{2}Y + \delta\right)\left(\frac{1}{2}Y + \delta + 1\right) - \frac{1}{4}Y^2 =$$

$$= \frac{1}{2}Y(2\delta + 1) + \delta(\delta + 1), \quad (17.4.16)$$

из (17.4.11) следует линейная зависимость m от Y :

$$m = m_0 + \sigma + \tau Y. \quad (17.4.17)$$

Отсюда для масс мультиплетов получаем таблицу

	T	Y	m эксп.	m теор.
Ω	0	-2	1679	$m_0 + \sigma - 2\tau$
Ξ_{δ}	$\frac{1}{2}$	-1	1532	$m_0 + \sigma - \tau$
Σ_{δ}	1	0	1385	$m_0 + \sigma$
Δ_{δ}	$\frac{3}{2}$	1	1238	$m_0 + \sigma + \tau$

(17.4.18)

Таким образом, теория предсказывает для декуплета эквидистантный спектр масс, что подтверждается экспериментом ($\Delta m = 147$). (Значение m_{Ω^-} взято из работы [8], стр. 9, (9).)

Квадратичная формула дает весьма близкие результаты.

Именно эквидистантность масс в декуплете дала возможность теоретически предсказать массу Ω^- -частицы. Обнаружение этой частицы является одним из наиболее ярких успехов теории унитарной симметрии.

27-плет барионов $\text{Sym}^0(2,2)$. В этом случае параметры Вейля λ, μ удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq \mu \leq 2 \leq \lambda \leq 4 \quad (17.4.19)$$

(см. (11.1.29)). Из (11.2.3), (11.2.6) вытекает, что для мультиплета (λ, μ)

$$\delta = T - \frac{1}{2} Y = 2 - \mu. \quad (17.4.20)$$

В силу (17.4.16), (11.2.3), массы всех мультиплетов с одним и тем же μ расположены эквидистантно; число таких мультиплетов равно числу возможных значений λ , т. е. трем. Так как μ также пробегает три значения, то 27-плет должен состоять из трех серий, каждая из которых содержит три мультиплета с равноотстоящими массами.

Имеющиеся экспериментальные данные пока недостаточны для проверки предсказания (в частности, вообще далеко не все частицы 27-плета в настоящее время обнаружены).

Октет мезонов B_0 . Рассмотрим теперь октет мезонов B_0 (со спином 0). B_0 описывается тем же представлением $\text{Sym}^0(1, 1)$, что и $F_{\frac{1}{2}}$, но для мезонов надо применить исходную формулу (17.4.8); пренебрегая «зарядовым» слагаемым, имеем:

$$m^2 = m_0^2 + \alpha + \beta Y + \gamma \left[T(T+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right]. \quad (17.4.21)$$

Для мультиплета B_0 имеем таблицу (ср. § 9.1)

	T	Y	$m_{\text{эксп.}}$	$m^2_{\text{теор.}}$
η	0	0	549	$m_0^2 + \alpha$
$\kappa_1 = \{\kappa^-, \widehat{\kappa}^0\}$	$\frac{1}{2}$	-1	496	$m_0^2 + \alpha - \beta + \frac{1}{2} \gamma$
$\kappa_2 = \{\kappa^0, \kappa^+\}$	$\frac{1}{2}$	1	496	$m_0^2 + \alpha + \beta + \frac{1}{2} \gamma$
π	1	0	138	$m_0^2 + \alpha + 2\gamma$

(17.4.22)

Поскольку мультиплеты κ_1 и κ_2 содержат, соответственно, частицы и их античастицы, массы этих мультиплетов должны быть равны (здесь привлекается, конечно, соотношение, не принадлежащее $SU(3)$ -теории!). Поэтому должно быть $\beta = 0$ и можно писать просто m_x^2 . Очевидно, можно исключить $m_0^2 + \alpha$:

$$m_\pi^2 - m_\eta^2 = 2\gamma, \quad m_x^2 - m_\eta^2 = \frac{1}{2} \gamma,$$

откуда

$$3m_\eta^2 + m_\pi^2 = 4m_x^2. \quad (17.4.23)$$

Если вычислить по этой формуле среднюю массу m_x через средние массы мультиплетов η , π , то находим 480, что отличается от экспериментального значения (496) менее чем на 4%.

Из линейной формулы (17.4.10) мы получили бы соотношение

$$3m_\eta + m_\pi = 4m_x, \quad (17.4.24)$$

расходящееся с опытом примерно на 10%.

Это указывает на малость «массы невозбужденного мезона» m_0 , не позволяющую применять линейную формулу к мезонам.

Заметим, что аналогичное (17.4.23) соотношение для октета мезонов B_1 не подтверждается опытными значениями масс. Причина этого будет выяснена в $SU(6)$ -теории.

Б. Зарядовое расщепление супермультиплетов

Теперь мы покажем на примерах, каким образом можно получать из *полной* формулы (17.4.8) или (17.4.10) информацию о массах отдельных частиц, входящих в супермультиплет. Мы ограничимся барионами и будем поэтому пользоваться линейной формулой.

Напомним, что *согласно принятому в § 17.2 определению эти частицы изображаются собственными векторами оператора массы m .*

Итак, надо найти собственные векторы оператора (17.4.10) и соответствующие собственные значения, равные массам отдельных частиц. Так как (17.4.10) содержит неизвестные коэффициенты $m_0, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$, то удастся, естественно, получить лишь некоторые соотношения между массами частиц супермультиплета.

Октет барионов $F_{1/2}$. Заметим, прежде всего, что векторы

$$\Psi_3^1, \Psi_3^2, \Psi_2^1, \Psi_1^2, \Psi_2^3, \Psi_1^3 \quad (17.4.25)$$

таблицы 10.1 из § 10.1 принадлежат как T -базису, так и аналогичному U -базису, соответствующему U -спину. Таким образом, *векторы (17.4.25) являются одновременно собственными векторами операторов $Y, Q, T (T + 1), U(U + 1)$ и, в силу этого, оператора m .* Эти векторы изображают, следовательно, элементарные частицы в смысле § 17.2, которые мы обозначим, в соответствии с таблицей 10.1, через

$$\Xi^-, \Xi^0, \Sigma^-, \Sigma^+, N^0, N^+. \quad (17.4.26)$$

Итак, для шести частиц октета барионов определения понятия элементарной частицы, данные в § 9.5, VIII и в § 17.2, IV, приводят к одним и тем же векторам состояния супермультиплета и, таким образом, согласуются друг с другом. Массы этих частиц вычисляются через соответствующие значения Y, T, Q, U по формуле (17.4.10).

Результаты вычисления содержатся в следующей таблице. Для частиц Σ^0, Λ , не принадлежащих U -базису, значения $\delta m'$ мы не вычислили; оно заменено многоточием (ср. § 18.3).

	m эксп.	Выражение массы через коэффициенты Окубо
Ξ^-	1320,8	$m_0 + \alpha - \beta + \frac{1}{2} \gamma + \alpha' + \beta' + \frac{1}{2} \gamma'$
Ξ^0	1314,3	$m_0 + \alpha - \beta + \frac{1}{2} \gamma + \alpha' + 2\gamma'$
Σ^-	1197,1	$m_0 + \alpha + 2\gamma + \alpha' + \beta' + \frac{1}{2} \gamma'$
Σ^0	1192,4	$m_0 + \alpha + 2\gamma + \dots$
Σ^+	1189,4	$m_0 + \alpha + 2\gamma + \alpha' - \beta' + \frac{1}{2} \gamma'$
Λ	1115,4	$m_0 + \alpha + \dots$
N^0	939,5	$m_0 + \alpha + \beta + \frac{1}{2} \gamma + \alpha' + 2\gamma'$
N^+	938,3	$m_0 + \alpha + \beta + \frac{1}{2} \gamma + \alpha' - \beta' + \frac{1}{2} \gamma'$

(17.4.27)

Для частиц (17.4.25) отсюда получается соотношение

$$m_{\Sigma^+} - m_{\Sigma^-} = (m_{N^+} - m_{N^0}) + (m_{\Xi^0} - m_{\Xi^-}), \quad (17.4.28)$$

которое хорошо согласуется с наблюдаемыми массами.

Сложнее обстоит дело для двух остальных частиц Σ^0 , Λ . Мы отложим их рассмотрение до § 18.3.

§ 17.5. Унитарный момент и унитарное поле в $SU(6)$ -теории

Как мы уже отмечали, подход к массовым формулам, изложенный в § 17.2, аналогичен описанию зееман-эффекта в обычной квантовой механике и имеет тот принципиальный недостаток, что при таком описании расщепление адрона вызывается «внешним» полем, в этом случае заведомо не существующим.

Поле, расщепляющее адрон, создается, как можно предполагать, самим адроном и практически исчезает на

очень небольшом расстоянии от адрона. Если попытаться продолжить аналогию с атомом в магнитном поле, то «унитарное поле» должно быть аналогично магнитному полю, создаваемому орбитальным вращением зарядов в атоме. Но тогда спектр масс адрона следует сравнивать не с зееман-эффектом, а с тонкой (и сверхтонкой, как мы увидим) структурой атомных спектров.

Так как мы теперь переходим к описанию адронов с помощью группы $SU(6)$, то под словом «адрон» дальше понимается произвольный фиксированный гипермультиплет $SU(6)$ -теории. При этом в качестве примеров будут рассмотрены 56-плет барионов и 35-плет мезонов. Чтобы построить схему расщепления адрона по аналогии с тонкой структурой атомного спектра, вернемся к изложению в § 17.1 и посмотрим, как надо видоизменить его с принятой теперь точки зрения. Основным результатом § 17.1, послужившим образцом для построения выражения энергии адрона в унитарном поле, является формула (17.1.18). Строение этой формулы тесно связано с группой симметрии $SU(2)$: $d_{\frac{3}{2}}^2$ образуют регулярное операторное представление этой группы, чем определяется в свою очередь строение \mathcal{H}_α^B .

Но что означает выражение: « $SU(2)$ (или $SO(3)$) есть группа симметрии атома»? Как мы уже говорили, оно означает, что атом с данным значением энергии H_0 может быть в различных состояниях, образующих пространство неприводимого представления группы $SO(3)$. Возможность применять к векторам состояния любые операторы $SO(3)$ означает, в частности, возможность произвольной ориентации орбитального момента, независимо от направления заданного поля. Такая точка зрения вполне законна при описании зееман-эффекта, где атом можно рассматривать как отдельную систему, взаимодействующую с другой системой — внешним полем. При этом мы пренебрегали малым (по сравнению с внешним полем) дополнительным магнитным полем, создаваемым орбитальными токами атома. В этом приближении и можно считать $SO(3)$ группой симметрии атома.

Дело, однако, существенно меняется при рассмотрении тонкой структуры атомного спектра. В этом случае

описанное выше приближение недопустимо, и атом *при заданном орбитальном моменте* допускает *меньшую группу симметрии* — группу вращений вокруг оси орбитального момента. Эта группа обозначается через $SO(2)$ (или через $U(1)$, так как изоморфна группе унитарных операторов в комплексной плоскости $C(1)$). Магнитное поле, создаваемое орбитальными токами, имеет *ту же* группу симметрии $SO(2)$.

Заметим, что $SO(3)$ можно рассматривать не только как группу симметрии атома в приближении, не учитывающем орбитальных токов, но и как *группу симметрии атомного спина*; это значит, что спиновые состояния атома образуют пространство, где действует группа $SU(2)$, локально изоморфная $SO(3)$.

Группа $SO(2)$ абелева, и у нее есть единственное нетривиальное неприводимое представление — одномерное (см. § 4.3 (с)). Если взять в качестве направления орбитального момента ось z , то соответствующая алгебра Ли $ASO(2)$ имеет единственную образующую A_3 . «Магнитный момент» J_3 есть оператор, пропорциональный A_3 (скалярный оператор, как частный случай тензороператора момента). Соответственно этому поле, действующее на такой момент, также должно быть скалярным; обозначая через \mathcal{H}^3 его единственную компоненту, получаем выражение слагаемого энергии, определяющего тонкую структуру спектра:

$$H_1 = J_3 \mathcal{H}^3. \quad (17.5.1)$$

Обычно получают (17.5.1) формально из (17.1.18), полагая $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}^2 = 0$. Предыдущие рассуждения позволяют, однако, понять групповой смысл перехода от (17.1.18) к (17.5.1), сохраняющийся и в более сложных случаях. С этой точки зрения формула (17.5.1) не является просто частным случаем (17.1.18) при специально выбранном поле, а описывает систему с другой группой симметрии.

Рассмотрим с той же точки зрения взаимодействие адрона — гипермультиплетта $SU(6)$ -теории — с создаваемым им же полем, которое мы по-прежнему будем называть унитарным полем. Чтобы получить скаляр — энергию, надо свернуть тензор этого поля с соответствующим тензороператором момента. Чтобы определить строение этих тен-

воров, надо знать группу симметрии системы; но о какой системе теперь идет речь? Так как мы хотим построить схему, соответствующую тонкой структуре, а не зееман-эффекту, то следует предположить, что адрон обладает $SU(6)$ -симметрией лишь в приближении, не учитывающем некоторых «квазиорбитальных токов», создающих унитарное поле, или, что то же, что $SU(6)$ есть группа симметрии G -спина адрона, под которым мы понимаем осуществляемое в $SU(6)$ -теории объединение обычного спина с унитарным.

Так как мы хотим построить описание спектра масс адрона по аналогии с тонкой структурой энергетического спектра атома, естественно считать, что при учете «квазиорбитальных токов» группа симметрии адрона $SU(6)$ сужается до некоторой подгруппы, так же как в случае атома $SO(3)$ сужается до подгруппы $SO(2)$.

Мы предполагаем, что эта подгруппа есть описанная в § 13.2 подгруппа $SU(3)$.

Оправдание этого предположения состоит в том, что, как мы увидим, из него вытекает формула масс для гипермультиплетов, подтверждающаяся на опыте.

В формуле (17.5.1) магнитный момент атома J_3 представляет простейший полином от образующих A_1, A_2, A_3 алгебры Ли $ASO(3)$, а именно, кратное A_3 ; здесь A_k взяты в представлении группы $SO(3)$, соответствующем рассматриваемому типу атома. Мы предположим, что тензор оператор унитарного момента адрона *инвариантен* в смысле § 5.4; тогда естественно искать его в виде алгебраического выражения от матриц Окубо \mathbf{A}_B^A представления группы $SU(6)$, задающего адрон.

Напомним, что операторы унитарного момента должны действовать в пространстве состояний адрона. С другой стороны, тензор оператор унитарного момента должен принадлежать некоторому неприводимому представлению *не* группы $SU(6)$, а подгруппы $SU(3)$, точно так же как J_3 принадлежит не представлению $SO(3)$, а (единственному нетривиальному) одномерному представлению подгруппы $SO(2)$.

Что касается тензорного строения унитарного момента, то простейшее предположение состоит в том, что его тензор оператор должен принадлежать *регулярному* пред-

ставлению группы $SU(3)$, по аналогии с магнитным полем (§ 17.1) и с описанием унитарного момента в $SU(3)$ -теории (§ 17.2). Оказывается, однако, что это предположение ведет к массовой формуле, противоречащей опытным данным. Поэтому в $SU(6)$ -теории приходится, в отличие от $SU(3)$ -теории, вводить наряду с тензораторатором *октетного момента* D_b^a тензораторатор *синглетного момента* D и, возможно, также высшие моменты — $D^{\{abc\}}$, $D^{\{ac\}}_{\{bd\}}$ и т. п.

Таким образом, предполагается, что унитарный момент адрона задается *последовательностью инвариантных тензоратораторов*

$$D, D_b^a, \dots, D_{(q)}^{(p)}, \dots \quad (17.5.2)$$

Но тогда и унитарное поле не может быть описано одним тензором Z_a^b , а должно задаваться последовательностью тензоров

$$Z, Z_a^b, \dots, Z_{(p)}^{(q)}, \dots \quad (17.5.3)$$

Выражение энергии взаимодействия адрона с унитарным полем, создаваемым его «квазиорбитальным движением», можно теперь искать в форме, обобщающей выражение (17.1.18):

$$H_1 = DZ + D_b^a Z_a^b + \dots + D_{(q)}^{(p)} Z_{(p)}^{(q)} + \dots \quad (17.5.4)$$

Как мы увидим, сохраняя здесь первые два члена, можно получить массовую формулу, удовлетворительно описывающую, во всяком случае, 56-плет. Высшие унитарные моменты в этой книге не рассматриваются.

Чтобы сделать более наглядной аналогию с тонкой структурой атомного спектра, которой мы руководствуемся, приводим следующий «словарь» (см. таблицу 17.1).

Сформулируем теперь принципы, лежащие в основе вывода массовой формулы $SU(6)$ -теории. Как и в § 17.2, мы заменим оператор H оператором m^2 ; замечания, сделанные там по поводу условий замены m^2 на m , остаются в силе и в $SU(6)$ -теории.

Под адроном ниже понимается гипермультиплет $SU(6)$ -теории.

Таблица 17.1

Атом	Адрон
Спин (J -спин)	G -спин ($SU(6)$ -спин)
Группа $SO(3) = SU(2)$	Группа $SU(6)$
A_1, A_2, A_3 (или $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, или $a_{\beta\alpha}^{\alpha}$; $\alpha, \beta = 1, 2$)	$\mathbf{A}_B^A, A, B = 1, \dots, 6$
A_k действует в пространстве состояний атома (размерности 1, 2, 3, ...)	\mathbf{A}_B^A действует в пространстве состояний адрона (размерности 35, 56, ...)
Орбитальный момент	Квазиорбитальный момент
Подгруппа $SO(2) = U(1)$	Подгруппа $SU(3)$
Магнитный момент J_3	Унитарный момент $D, D_b^a, \dots, D_{(q)}^{(p)}, \dots, a, b = 1, 2, 3$
$J_3 = \text{const} \cdot A_3 = \text{const} \cdot \sigma_3$	D, D_b^a, \dots алгебраически выражаются через \mathbf{A}_B^A
Магнитное поле \mathcal{H}^3	Унитарное поле $Z, Z_a^b, \dots, Z_{(p)}^{(q)}, \dots$
$H_1 = J_3 \mathcal{H}^3$	$H_1 = DZ + D_b^a Z_a^b +$ $+ \dots + D_{(q)}^{(p)} Z_{(p)}^{(q)} + \dots$

I. Адрону сопоставляется последовательность тензор-операторов унитарного момента $D, D_b^a, \dots, D_{(q)}^{(p)}, \dots$, принадлежащих неприводимым операторным представлениям группы $SU(3)$. При фиксированных индексах D, D_b^a, \dots , есть оператор, действующий в пространстве состояний адрона (т. е. в пространстве неприводимого представления группы $SU(6)$, определяющего адрон).

II. Существует поле, взаимодействующее с адроном (мы называем его унитарным полем). Это поле задается последовательностью тензоров $Z, Z_a^b, \dots, Z_{(p)}^{(q)}$... со скалярными компонентами, принадлежащих неприводимым представлениям группы $SU(3)$.

III. На пространстве состояний адрона определен оператор квадрата массы m^2 , имеющий вид

$$m^2 = m_0^2 + DZ + D_b^a Z_a^b + \dots + D_{(q)}^{(p)} Z_{(p)}^{(q)} + \dots, \quad (17.5.5)$$

где m_0^2 — кратное единичного оператора.

Комментарии, сделанные в § 17.2 к принципам I—III, и здесь остаются в силе.

IV. Собственные векторы оператора m^2 образуют полную ортонормированную систему в пространстве состояний адрона. Корни из соответствующих собственных значений образуют спектр масс адрона, а собственные векторы взаимно однозначно соответствуют элементарным частицам с определенной массой.

При этом одной частице в мысле § 17.2, IV, как мы увидим, соответствует несколько частиц в $SU(6)$ -теории, различающихся значением проекции спина J_3 .

V. Унитарный момент адрона $D, D_b^a, \dots, D_{(q)}^{(p)}, \dots$ алгебраически выражается через операторы Окубо \mathbf{A}_B^A неприводимого представления группы $SU(6)$, определяющего адрон.

Чтобы уточнить смысл термина «алгебраическое выражение», запишем операторы Окубо в виде $\mathbf{A}_{\beta\delta}^{\alpha\alpha}$ (ср. главу 13). Тогда существуют следующие три способа построить из операторов $\mathbf{A}_{\beta\delta}^{\alpha\alpha}$ скалярный оператор:

$$\left. \begin{aligned} D^{(1)} &= \mathbf{A}_{\beta c}^{\alpha c} \mathbf{A}_{\alpha d}^{\beta d}, \\ D^{(2)} &= \mathbf{A}_{\alpha d}^{\alpha c} \mathbf{A}_{\beta c}^{\beta d}, \\ D^{(3)} &= \mathbf{A}_{\beta c}^{\alpha c} \mathbf{A}_{\alpha c}^{\beta d}. \end{aligned} \right\} \quad (17.5.6)$$

Далее, существует единственное линейное выражение от операторов Окубо валентности D_b^a :

$$D_b^{(0)a} = \mathbf{A}_{\alpha b}^{\alpha a} \quad (17.5.7)$$

и три квадратичных выражения:

$$\left. \begin{aligned} D_b^a &= \mathbf{A}_{\beta c}^{\alpha a} \mathbf{A}_{\alpha b}^{\beta c} - \frac{1}{3} \delta_b^a \mathbf{A}_{\beta c}^{\alpha d} \mathbf{A}_{\alpha d}^{\beta c}, \\ D_b^a &= \mathbf{A}_{\alpha c}^{\alpha a} \mathbf{A}_{\beta b}^{\beta c} - \frac{1}{3} \delta_b^a \mathbf{A}_{\alpha c}^{\alpha d} \mathbf{A}_{\beta d}^{\beta c}, \\ D_b^a &= \mathbf{A}_{\beta b}^{\alpha a} \mathbf{A}_{\alpha c}^{\beta c} - \frac{1}{3} \delta_b^a \mathbf{A}_{\beta d}^{\alpha d} \mathbf{A}_{\alpha c}^{\beta c} \end{aligned} \right\} \quad (17.5.8)$$

(легко проверить условие $D_c^c = 0$, характеризующее регулярное представление).

Аналогично строятся кубические выражения; для этого надо из тензоров

$$\mathbf{A}_{\beta c}^{\alpha a} \mathbf{A}_{\gamma d}^{\beta c} \mathbf{A}_{\alpha b}^{\gamma d}, \dots \quad (17.5.9)$$

оставить линейные комбинации, принадлежащие неприводимым представлениям $SU(3)$.

Можно показать, аналогично соответствующим рассуждениям в § 17.3, что в выражение m^2 входят лишь свертки не более пяти матриц Окубо, так как более длинные свертки через них линейно выражаются. В действительности, однако, ограничиваются лишь линейными и квадратичными свертками, что уже приводит к хорошей формуле масс. Такое сужение принципа V трудно оправдать какими-либо другими доводами, кроме экспериментального подтверждения полученных результатов. Можно только заметить, что формула масс $SU(3)$ -теории должна получиться из формулы масс $SU(6)$ -теории при специализации значений входящих в нее параметров, соответствующей выделению F -мультиплетов из гипермультиплета.

Поэтому можно ожидать, что обе формулы должны иметь одинаковое алгебраическое строение, а в $SU(3)$ -формулу входят лишь линейные и квадратичные члены.

Кроме того, как мы уже сказали, высшие унитарные моменты не учитываются. Эту ситуацию иногда выражают, говоря, что синглетный и октетный члены формулы (17.5.5) являются доминирующими.

Итак, мы предположим, что унитарный момент имеет строение

$$\left. \begin{aligned} D &= \rho D^{(1)} + \sigma D^{(2)} + \tau D^{(3)}, \\ D_b^a &= \kappa D_b^a^{(0)} + \lambda D_b^a^{(1)} + \mu D_b^a^{(2)} + \nu D_b^a^{(3)}. \end{aligned} \right\} \quad (17.5.10)$$

Что касается унитарного поля, то для его компонент Z_a^b мы по-прежнему примем выражение (17.2.22).

IV. Компоненты унитарного поля, соответствующие регулярному представлению группы $SU(3)$, имеют вид

$$Z_a^b = C \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} + C' \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad (17.5.11)$$

где $C' \ll C$.

Наконец, выражение (17.2.23) заменяется следующим, вытекающим из (17.5.5) при сделанных нами предположениях об унитарном моменте и унитарном поле:

VII.

$$\left. \begin{aligned} m^2 &= m_0^2 + \delta m^2 + \delta m^{2'}, \\ \delta m^2 &= \xi_1^{(1)} D + \xi_2^{(2)} D + \xi_3^{(3)} D + \zeta^{(0)} D_3^3 + \eta_1^{(1)} D_3^3 + \eta_2^{(2)} D_3^3 + \eta_3^{(3)} D_3^3, \\ \delta m^{2'} &= \xi_1^{(1)'} D + \xi_2^{(2)'} D + \xi_3^{(3)'} D + \zeta'^{(0)} D_1^1 + \eta_1^{(1)'} D_1^1 + \eta_2^{(2)'} D_1^1 + \eta_3^{(3)'} D_1^1. \end{aligned} \right\} \quad (17.5.12)$$

Как и в § 17.2, оператор массы перестановочен с Q , Y , так что векторы с определенным значением массы имеют также определенные значения заряда и гиперзаряда (см. обсуждение в § 18.1).

Далее, из вывода (17.5.12) следует, что коэффициенты ξ_k' пропорциональны ξ_k и ζ' , η_k' пропорциональны ζ , η_k :

$$\xi_k' = \vartheta_0 \xi_k, \quad \zeta' = \vartheta_1 \zeta, \quad \eta_k' = \vartheta_1 \eta_k \quad (k=1, 2, 3, |\vartheta_0|, |\vartheta_1| \ll 1). \quad (17.5.13)$$

Заметим, что пропорциональность коэффициентов в (17.5.13) не согласуется с опытными значениями масс (см. пояснение в § 18.3).

Комментарии

При мотивировке основной формулы (17.5.5) для оператора квадрата массы мы руководствовались аналогией с формулами, описывающими тонкую структуру атомного спектра. Однако при выводе этих последних магнитное поле \mathcal{H} возникает в результате усреднения оператора энергии H по пространственным координатам. Точнее, энергия атома записывается в виде

$$H = H_0 + \alpha \sum_{k=1}^3 M_k J_k, \quad (17.5.14)$$

где M_k — орбитальный момент атома, а J_k — его спиновый момент. M_k ($k = 1, 2, 3$) есть дифференциальный оператор, действующий на волновые функции $\psi(x, y, z)$, J_k — оператор в конечномерном спиновом пространстве (ср. (7.1.10)), а α — малый параметр.

Предположим, что состояние атома в *приближении, не учитывающем спина*, задано однозначно (набором соответствующих квантовых чисел (n)). Такое состояние является собственным вектором $\psi_{(n)}$ оператора H_0 . *Усредненный оператор энергии*, действующий на спиновом пространстве, есть

$$H_{(n)} = E_{(n)} + \sum_{k=1}^3 J_k \mathcal{H}_k, \quad (17.5.15)$$

где $E_{(n)}$ — собственное значение H_0 , а

$$\mathcal{H}_k = \alpha (\psi_{(n)} | M_k | \psi_{(n)}). \quad (17.5.16)$$

Формула (17.5.5), по-видимому, имеет такой же характер, и Z, Z_a^b, \dots надо интерпретировать как средние для заданного состояния адрона (рассматриваемого в прибли-

жени, не учитывающем G -спина). Так как в излагаемой теории рассматривается только одно («основное») состояние адрона в указанном приближении, то индексы, аналогичные (n), у нас везде опущены.

§ 17.6. Формула масс в $SU(6)$ -теории

Массовая формула получается преобразованием формул (17.5.12), в результате которого оператор m^2 выражается через основные наблюдаемые группы $SU(6)$ и некоторые операторы Казимира. Займемся сначала «гиперзарядовым» слагаемым δm^2 .

Введем в рассмотрение три оператора Казимира, соответствующих группе $SU(6)$ и ее подгруппам $SU(3)$, $SU(2)_J$, $SU(4)$. Для самой группы $SU(6)$ квадратичный оператор Казимира строится вполне аналогично C_2 из (17.3.2):

$$C_2(6) = \mathbf{A}_D^C A_C^D = \mathbf{A}_{\delta d}^{\gamma c} \mathbf{A}_{\gamma c}^{\delta d}. \quad (17.6.1)$$

Операторы Окубо подгруппы $SU(3)$ суть (ср. (13.2.14)):

$$A_b^a = \mathbf{A}_{\gamma b}^{\gamma a}, \quad (17.6.2)$$

и из них составляется оператор Казимира

$$C_2(3) = A_d^c A_c^d = \mathbf{A}_{\gamma d}^{\gamma c} \mathbf{A}_{\delta c}^{\delta d}. \quad (17.6.3)$$

Аналогично имеем для подгруппы $SU(2)_J$ операторы Окубо (ср. (13.2.17))

$$a_\beta^\alpha = \mathbf{A}_{\beta c}^{\alpha c} \quad (17.6.4)$$

и оператор Казимира

$$C_2(2) = a_{\delta a}^{\gamma \delta} a_{\gamma}^{\delta} = \mathbf{A}_{\delta c}^{\gamma c} \mathbf{A}_{\gamma d}^{\delta d}. \quad (17.6.5)$$

Наконец, для подгруппы $SU(4)$ матрицы Окубо имеют вид (ср. (13.3.12))

$$W_{\bar{B}}^{\bar{A}} = \mathbf{A}_{\bar{B}}^{\bar{A}} - \frac{1}{4} \delta_{\bar{B}}^{\bar{A}} \mathbf{A}_{\bar{C}}^{\bar{C}} = \mathbf{A}_{\beta \bar{b}}^{\bar{a} \bar{a}} - \frac{1}{4} \delta_{\beta}^{\alpha} \delta_{\bar{b}}^{\bar{a}} \mathbf{A}_{\gamma \bar{c}}^{\gamma \bar{c}}, \quad (17.6.6)$$

а оператор Казимира есть (см. (13.2.21)):

$$C_2(4) = \left(\mathbf{A}_{\bar{B}}^{\bar{A}} - \frac{1}{4} \delta_{\bar{B}}^{\bar{A}} \mathbf{A}_{\bar{C}}^{\bar{C}} \right) \left(\mathbf{A}_{\bar{A}}^{\bar{B}} - \frac{1}{4} \delta_{\bar{A}}^{\bar{B}} \mathbf{A}_{\bar{D}}^{\bar{D}} \right) = \\ = \mathbf{A}_{\bar{B}}^{\bar{A}} \mathbf{A}_{\bar{A}}^{\bar{B}} - \frac{1}{4} Y^2 = \mathbf{A}_{\beta\bar{b}}^{\alpha\bar{a}} \mathbf{A}_{\alpha\bar{a}}^{\beta\bar{b}} - \frac{1}{4} Y^2. \quad (17.6.7)$$

Точно так же, как в § 17.3 для $C_2(3)$, доказываем, что каждый оператор Казимира перестановочен со всеми операторами Окубо соответствующей подгруппы и, следовательно, каждое пространство неприводимого представления этой группы является его собственным пространством. Если λ — соответствующее собственное значение, то мы будем говорить, что оператор Казимира *принимает значение* λ на этом пространстве. Легко видеть, что значение λ не меняется при замене представления эквивалентным и зависит, следовательно, лишь от схемы Юнга неприводимого представления $SU(n)$. Так, для октетов, входящих в любые гипермультиплеты, $C_2(3)$ равно одному и тому же числу (как мы увидим ниже, шести).

С помощью этих операторов и преобразования, аналогичного (17.4.1), легко выразить D_b^a в виде

$$\left. \begin{aligned} D_b^a &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{A}_{\beta\bar{c}}^{\alpha\bar{a}}, \mathbf{A}_{\alpha\bar{b}}^{\beta\bar{c}} \} - \frac{1}{3} \delta_b^a C_2(6) - 3 D_b^a, \\ D_b^a &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{A}_{\alpha\bar{c}}^{\alpha\bar{a}}, \mathbf{A}_{\beta\bar{b}}^{\beta\bar{c}} \} - \frac{1}{3} \delta_b^a C_2(3) - \frac{3}{2} D_b^a, \\ D_b^a &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{A}_{\beta\bar{b}}^{\alpha\bar{a}}, \mathbf{A}_{\alpha\bar{c}}^{\beta\bar{c}} \} - \frac{1}{3} \delta_b^a C_2(2). \end{aligned} \right\} \quad (17.6.8)$$

Для дальнейших преобразований удобно переписать (17.5.12) в виде

$$\delta m^2 = \alpha_0 C_2(6) + \alpha_1 C_2(3) + \alpha_2 C_2(2) + \alpha_3 \mathbf{A}_{\alpha\bar{3}}^{\alpha\bar{3}} + \alpha_4 \{ \mathbf{A}_{\beta\bar{c}}^{\alpha\bar{3}}, \mathbf{A}_{\alpha\bar{3}}^{\beta\bar{c}} \} - \\ - C_2(6) + \alpha_5 \{ \mathbf{A}_{\alpha\bar{c}}^{\alpha\bar{3}}, \mathbf{A}_{\beta\bar{3}}^{\beta\bar{c}} \} - C_2(3) + \alpha_6 \{ \mathbf{A}_{\beta\bar{3}}^{\alpha\bar{3}}, \mathbf{A}_{\alpha\bar{c}}^{\beta\bar{c}} \} - C_2(2). \quad (17.6.9)$$

Выражения в квадратных скобках можно преобразовать следующим образом (надчеркнутые индексы пробегает

значения 1, 2):

$$\left. \begin{aligned} \{ \mathbf{A}_{\beta c}^{\alpha 3}, \mathbf{A}_{\alpha 3}^{\beta c} \} - \mathbf{A}_{\beta c}^{\alpha d} \mathbf{A}_{\alpha d}^{\beta c} &= \mathbf{A}_{\alpha 3}^{\beta 3} \mathbf{A}_{\beta 3}^{\alpha 3} - \mathbf{A}_{\beta c}^{\alpha \bar{d}} \mathbf{A}_{\alpha \bar{d}}^{\beta \bar{c}}, \\ \{ \mathbf{A}_{\alpha c}^{\alpha 3}, \mathbf{A}_{\beta 3}^{\beta c} \} - \mathbf{A}_{\alpha c}^{\alpha d} \mathbf{A}_{\beta d}^{\beta c} &= \mathbf{A}_{\alpha 3}^{\alpha 3} \mathbf{A}_{\beta 3}^{\beta 3} - \mathbf{A}_{\alpha c}^{\alpha \bar{d}} \mathbf{A}_{\beta \bar{d}}^{\beta \bar{c}}, \\ \{ \mathbf{A}_{\beta 3}^{\alpha 3}, \mathbf{A}_{\alpha c}^{\beta c} \} - \mathbf{A}_{\beta d}^{\alpha d} \mathbf{A}_{\alpha c}^{\beta c} &= \mathbf{A}_{\alpha 3}^{\beta 3} \mathbf{A}_{\beta 3}^{\alpha 3} - \mathbf{A}_{\alpha c}^{\beta \bar{c}} \mathbf{A}_{\beta \bar{d}}^{\alpha \bar{d}}. \end{aligned} \right\} (17.6.10)$$

Согласно (13.2.21)

$$Y = - \mathbf{A}_{\alpha 3}^{\alpha 3}. \quad (17.6.11)$$

Из формул (13.2.17), (13.3.18), (13.3.21), (13.2.24) вычислениями, совершенно аналогичными (17.4.2), находим:

$$\left. \begin{aligned} 2J(J+1) &= \mathbf{A}_{\beta c}^{\alpha c} \mathbf{A}_{\alpha d}^{\beta d} = C_2(2), \\ 2N(N+1) &= \mathbf{A}_{\beta c}^{\alpha \bar{c}} \mathbf{A}_{\alpha \bar{d}}^{\beta \bar{d}} - \frac{1}{2} Y^2, \\ 2S(S+1) &= \mathbf{A}_{\beta 3}^{\alpha 3} \mathbf{A}_{\alpha 3}^{\beta 3} - \frac{1}{2} Y^2, \\ 2T(T+1) &= \mathbf{A}_{\alpha \bar{d}}^{\alpha \bar{c}} \mathbf{A}_{\beta \bar{c}}^{\beta \bar{d}} - \frac{1}{2} Y^2. \end{aligned} \right\} (17.6.12)$$

Подставляя в (17.6.9) выражения (17.6.10), используя (17.6.11), (17.6.12), (17.6.7) и вводя новые обозначения для коэффициентов, мы приходим к формуле масс $SU(6)$ -теории, принадлежащей Бегу и Сингу [1]:

$$\begin{aligned} m^2 &= m_0^2 + \mu_1 C_2(3) + \mu_2 \cdot 2J(J+1) + \mu_3 Y + \\ &+ \mu_4 [2S(S+1) + \frac{1}{4} Y^2 - C_2(4)] + \\ &+ \mu_5 \left[-\frac{1}{2} Y^2 + 2T(T+1) \right] + \\ &+ \mu_6 [2N(N+1) - 2S(S+1)]. \end{aligned} \quad (17.6.13)$$

Слагаемое, кратное $C_2(6)$, включено в m_0^2 , так как оно постоянно на гипермультиплете.

Для оператора «зарядового» расщепления δm^2 получается аналогичное выражение, в котором Y надо заменить на $-Q$, T — на U , а операторы странного и нестранного спина надо заменить новыми операторами, соответствующи-

щами переходу от T -спина к U -спину; при этом подгруппа $SU(4)$ располагается в $SU(6)$ иначе, чем было описано в главе 13. Мы не будем проводить всех этих выкладок, а ограничимся в $SU(6)$ -теории формулой гиперзарядового расщепления (17.6.13), описывающей спектр масс T -мультиплетов, но не различающей массы частиц в пределах T -мультиплета.

Чтобы применить формулу масс к 56-плету барионов и 35-плету мезонов, вычислим сначала значения операторов Казимира $C_2(3)$, $C_2(4)$ для соответствующих изотопических мультиплетов.

Вычисление операторов Казимира. Заметим сначала, что для синглета все операторы алгебры Ли обращаются в нуль, так как все операторы $SU(n)$ представляются единичным оператором. Значит, для синглета $C_2(n) = 0$. Для октета можно непосредственно вычислить операторы Окубо по формуле (5.3.28). Так как значение $C_2(3)$ на всех векторах состояния октета одинаково, вычислим, например, $C_2(3) (\Psi_1^1 - \frac{1}{3} \Psi_c^c)$:

$$A_l^k \Psi_c^c = 0,$$

$$A_k^1 A_1^k \Psi_1^1 = A_1^k A_k^1 \Psi_1^1 = \Psi_1^1 - \Psi_k^k \quad (\text{н. с. по } k),$$

откуда

$$C_2(3) \left(\Psi_1^1 - \frac{1}{3} \Psi_c^c \right) = 6 \left(\Psi_1^1 - \frac{1}{3} \Psi_c^c \right).$$

Аналогично, для декуплета можно вычислять операторы Окубо по формулам (5.3.24), (5.3.26). Например, для Ψ_{111} имеем

$$(A_1^1)^2 \Psi_{111} = 4\Psi_{111}, \quad (A_2^2)^2 \Psi_{111} = (A_3^3)^2 \Psi_{111} = \Psi_{111}.$$

$$A_1^k A_k^1 \Psi_{111} = 3\Psi_{111} \quad (\text{н. с.}, k \neq 1),$$

$$A_l^k A_k^l \Psi_{111} = 0 \quad (\text{н. с. по } k, l, k \neq l, l \neq 1),$$

откуда

$$C_2(3) \Psi_{111} = 12\Psi_{111}.$$

Для входящих в 56-плет W -мультиплетов — 20-плета, декуплета, квадруплета — операторы Окубо вычисля-

ются точно так же. Например, взяв вектор состояния Ψ_{111} , входящий в 20-плет (см. таблицу $SU(4)$ -редукции), имеем (15.2.28):

$$W_1^1 \Psi_{111} = \frac{9}{4} \Psi_{111}, \quad W_{\bar{A}}^{\bar{A}} \Psi_{111} = -\frac{3}{4} \Psi_{111} \quad (\text{н. с.}, \quad \bar{A} \neq 1),$$

$$W_1^k W_k^1 \Psi_{111} = 3 \Psi_{111} \quad (\text{н. с.}, \quad k \neq 1),$$

$$W_l^k W_k^l \Psi_{111} = 0 \quad (\text{н. с.}, \quad k \neq l, \quad l \neq 1),$$

откуда

$$C_2(4) \Psi_{111} = \frac{63}{4} \Psi_{111}.$$

Аналогично находим, что для W -декуплета $C_2(4) = 9$ (15.2.42), а для квадруплета $C_2(4) = \frac{15}{4}$ (15.2.51).

Таким образом, мы нашли значения $C_2(3)$ и $C_2(4)$ для всех F - и W -мультиплетов, входящих в 56-плет.

Как было выше отмечено, значения операторов Казимира для F - или W -мультиплета зависят лишь от размерности мультиплета, но не от гипермультиплета, в который они входят. По сравнению с 56-плетом, 35-плет содержит единственный новый тип мультиплета — 15-плет $SU(4)$ -редукции. С помощью (15.1.28) легко найти соответствующее ему значение $C_2(4) = 8$.

Так как T -мультиплеты барионов Ξ , Σ , Λ , N , Ω , Ξ_8 , Σ_8 , Δ_8 полностью входят в соответствующие F - и W -мультиплеты 56-плета (см. таблицы главы 15), мы находим для всех их значения операторов Казимира. Точно так же их можно найти для T -мультиплетов мезонов η , π , ρ . Сложнее обстоит дело для T -мультиплетов $(\kappa^-, \tilde{\kappa}^0)$, (κ^0, κ^+) , $(\tilde{\kappa}^-, \tilde{\kappa}^0)$, $(\tilde{\kappa}^0, \tilde{\kappa}^+)$. Из таблицы $SU(4)$ -редукции 35-плета видно, что κ^- есть линейная комбинация двух $SU(4)$ -частиц, принадлежащих хотя и различным, но эквивалентным W -мультиплетам, а именно, W -квадруплетам; поэтому для κ^- (и аналогично для других κ^- и $\tilde{\kappa}^-$ -частиц) $C_2(4) = \frac{15}{4}$.

В таблице 17.2 мультиплеты κ^- и $\tilde{\kappa}^-$ -мезонов обозначены, в написанном выше порядке, через $\tilde{\kappa}^-$, κ^- , $\tilde{\kappa}^0$, $\tilde{\kappa}^+$. Будем, начиная с этого места, обозначать $SU(3)$ -частицы ϕ , ω

Таблица 17.2

Изотопиче- ский мультиплет	Y	T	N	S	J	$C_2(3)$	$C_2(4)$
Σ	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{15}{4}$
Σ	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	6	9
Λ	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	6	9
N	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{63}{4}$
Ω	-2	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	12	0
Σ_8	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	12	$\frac{15}{4}$
Σ_8	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	12	9
Δ_8	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	12	$\frac{63}{4}$
η	0	0	0	0	0	6	0
$\tilde{\chi}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	6	$\frac{15}{4}$
χ	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	6	$\frac{15}{4}$
π	0	1	0	0	0	6	8
$\tilde{\chi}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	6	$\frac{15}{4}$
χ	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	6	$\frac{15}{4}$
ρ	0	1	1	0	1	6	8
Φ'	0	0	1	6	...
ω'	0	0	1	0	...
Φ''	0	0	0	1	1	...	0
ω''	0	0	1	0	1	...	8

через Φ' , ω' . Эти частицы не имеют определенного значения $C_2(4)$; это значит, что их векторы состояния не являются собственными векторами оператора $C_2(4)$, поскольку

ку являются линейными комбинациями векторов 15-плета и W -синглета. Аналогично $SU(4)$ -частицы

$$\left. \begin{aligned} \varphi'' &= \sqrt{\frac{1}{3}} \omega' + \sqrt{\frac{2}{3}} \varphi', \\ \omega'' &= \sqrt{\frac{2}{3}} \omega' - \sqrt{\frac{1}{3}} \varphi' \end{aligned} \right\} \quad (17.6.14)$$

не имеют определенного значения $C_2(3)$. Поэтому в соответствующих местах таблицы проставлены многоточия.

Мы приводим также, для удобства читателя, уже известные из главы 15 значения других наблюдаемых, входящих в массовые формулы.

Теперь мы рассмотрим два основных случая.

А. 56-плет барионов

Нетрудно проверить, что для 56-плета справедливы следующие тождества:

$$\left. \begin{aligned} 2S(S+1) - C_2(4) + \frac{1}{4} Y^2 &= -8Y - \frac{15}{2}, \\ 2J(J+1) - C_2(3) &= -\frac{9}{2}, \\ 2T(T+1) - \frac{1}{2} Y^2 - 2N(N+1) + \\ &+ 2S(S+1) = -2Y + \frac{3}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (17.6.15)$$

Чтобы доказать первое из этих тождеств, обратимся к таблице $SU(4)$ -редукции 56-плета (или к таблице этого параграфа).

$$\left. \begin{aligned} \text{Для } 20\text{-плета } S &= 0, \quad C_2(4) = \frac{63}{4}, \quad Y = 1; \\ \text{для } W\text{-декуплета } S &= \frac{1}{2}, \quad C_2(4) = 9, \quad Y = 0; \\ \text{для квадруплета } S &= 1, \quad C_2(4) = \frac{15}{4}, \quad Y = -1; \\ \text{для синглета } S &= \frac{3}{2}, \quad C_2(4) = 0, \quad Y = -2. \end{aligned} \right\} \quad (17.6.16)$$

Во всех случаях первое равенство (17.6.15) справедливо; так как любой вектор пространства 56-плета разлагается на составляющие, принадлежащие пространствам W -мультиплетов, тождество доказано.

Доказательство третьего тождества проводится аналогично, перебором T -мультиплетов; при доказательстве второго надо воспользоваться таблицей $SU(3)$ -редукции.

Так как для барионов можно заменить оператор m^2 оператором m (см. § 17.4), тождества (17.6.15) приводят формулу (17.6.13) к виду

$$m = m_0 + \beta Y + \gamma \left[T(T+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right] + \delta \cdot 2J(J+1). \quad (17.6.17)$$

Фиксируя один из F -мультиплетов 56-плета, мы тем самым фиксируем значение J ; тогда последнее слагаемое (17.6.17) становится кратным единичного оператора и может быть включено в первое. Мы приходим, таким образом, снова к формуле (17.4.11) для гиперзарядового расщепления массы.

Однако в массовой формуле для 56-плета (17.6.17) содержится добавочная информация по сравнению с (17.4.11): в ней описывается зависимость массы от спина. Рассмотрим, например, гиперзарядовое расщепление для октета барионов и декуплета барионов; в обоих случаях формула (17.6.17) приводит к одинаковым значениям коэффициентов β , γ . Это значит, что разности масс изотопических мультиплетов октета равны разностям масс соответствующих (с теми же значениями Y , T) мультиплетов декуплета:

$$m_{\Sigma 8} - m_{\Sigma} = m_{\Sigma 8} - m_{\Sigma}. \quad (17.6.18)$$

Соответствующие табличные разности равны 215 и 192, так что (17.6.18) соблюдается с точностью в 10%.

Б. 35-плет мезонов

Для 35-плета мезонов формула (17.6.13) дает значительно меньшую информацию, так как в этом случае не существует тождеств, аналогичных (17.6.15), и вследствие этого число неизвестных коэффициентов μ_k не уменьшается. Мы

покажем, однако, что соотношение (17.4.23) между массами мезонов вытекает из (17.6.13), если использовать дополнительно (не следующее из теории унитарной симметрии) равенство масс частицы и античастицы. Заметим, что при выводе (17.4.23) было использовано то же соображение.

Для изотопических мультиплетов (κ^- , $\tilde{\kappa}^0$) и (κ^0 , κ^+) значение Y равно, соответственно, $-1, 1$, остальные же значения операторов, входящие в (17.6.13) (т. е. $C_2(3)$, $C_2(4)$, J , T , S , N), совпадают. Поэтому из равенства масс частицы κ^0 и античастицы $\tilde{\kappa}^0$ следует, что для 35-плета $\mu_3 = 0$.

Подставляя в (17.6.13) табличные значения наблюдаемых, имеем

$$\begin{aligned} m_{\kappa}^2 &= m_0^2 + 6\mu_1 - 2\mu_4 + \mu_5, \\ m_{\pi}^2 &= m_0^2 + 6\mu_1 - 8\mu_4 + 4\mu_5, \\ m_{\eta}^2 &= m_0^2 + 6\mu_1, \end{aligned}$$

откуда вытекает соотношение (см. (17.4.23))

$$m_{\kappa}^2 = \frac{1}{4}(3m_{\eta}^2 + m_{\pi}^2). \quad (17.6.19)$$

Другое известное из опыта соотношение между массами мезонов, так называемое «правило интервалов»

$$m_{\kappa}^2 - m_{\pi}^2 = m_{\rho}^2 - m_{\eta}^2, \quad (17.6.20)$$

не вытекает из формулы масс (17.6.13), но и не противоречит ей; оно накладывает на коэффициенты соотношение

$$\mu_6 = 0, \quad (17.6.21)$$

как легко проверить с помощью таблицы 17.2. Есть и другое соотношение между коэффициентами массовой формулы для 35-плета, также не имеющее удовлетворительного теоретического объяснения, но подтверждающееся на опыте:

$$\mu_5 = \mu_6. \quad (17.6.22)$$

Мы вернемся к этому соотношению в главе 18, после рассмотрения так называемого смешения частиц.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МАССОВЫХ ФОРМУЛ. ОТОЖДЕСТВЛЕНИЕ И СМЕШЕНИЕ ЧАСТИЦ

В этой главе обсуждаются некоторые принципиальные вопросы, связанные с массовыми формулами. Как уже было отмечено в предисловии, подробное обсуждение экспериментальных данных выходит за рамки этой книги. Поэтому мы ограничиваемся лишь самыми необходимыми комментариями.

§ 18.1. Массовые формулы и понятие элементарной частицы

Как мы видели, теория унитарной симметрии приводит к нескольким различным определениям понятия элементарной частицы. Прежде всего, следует четко различать экспериментальный объект, называемый элементарной частицей, от абстрактного понятия той или иной теории, также называемого элементарной частицей. Конечно, в каждой такой теории понятия строятся с целью «моделировать» экспериментальные объекты; но математическая модель не обязательно в точности отражает свойства объекта. Поэтому не приходится удивляться, что «векторы состояний адрона», построенные с помощью той или иной математической процедуры, не всегда удается отождествить с экспериментальными частицами. Скорее следовало бы удивиться, что такое отождествление в подавляющем большинстве случаев удается, а немногие исключения также могут быть поняты с позиций той же теории.

В этой книге изложено шесть различных определений понятия элементарной частицы в следующих системах описания адронов:

1. $SU(3)$ -классификация с редукцией то T -спину (т. е. по подгруппе $SU(2)_T$).
2. $SU(3)$ -классификация с редукцией по U -спину (т. е. по подгруппе $SU(2)_U$).
3. $SU(6)$ -классификация с редукцией по подгруппе $SU(3)$.
4. $SU(6)$ -классификация с редукцией по подгруппе $SU(4)$.
5. Массовая формула для группы $SU(3)$.
6. Массовая формула для группы $SU(6)$.

Таким образом, шесть определений надо сравнить друг с другом и с экспериментом. Определение 2 приводит, в случае октета, к тем же векторам состояния, что и определение 1, за исключением двух векторов плоскости (Σ^0, Λ) (см. § 10.1, Б). Обсуждение возникающего здесь тонкого эффекта мы откладываем до § 18.3, пока же заметим, что T -векторы таблицы 10.1 при подстановке в массовую формулу (17.4.11) для октета дают соотношения для масс Σ^0 и Λ , близкие к экспериментальным, тогда как U -векторы — очень далекие. Таким образом, определение 2 не имеет самостоятельного значения; но, как мы увидим, оно все же имеет некоторое отношение к опыту.

Определение 3 содержит определение 1 как частный случай, или, точнее, переходит в определение 1, если пренебречь значением проекции спина J_3 . Отношение между этими определениями уже подробно обсуждалось в § 14.2, А. С нашей точки зрения, « $SU(3)$ -теория» должна пониматься не как самостоятельная теория, а как часть описания с помощью группы $SU(6)$, остающаяся после пренебрежения J -спином. Поэтому мы не будем больше заниматься определением 1, а сосредоточим внимание на определении 3.

$SU(6)/SU(3)$ -частицы очень хорошо соответствуют экспериментально наблюдаемым барионам, как видно из таблицы 15.3 в § 15.2, А; именно, векторам состояний $SU(3)$ -редукции приписываются те же значения наблюдаемых Q, Y, T, J , которые известны у соответствующих экспериментальных частиц; более того, расщепление на изотопические мультиплеты, вытекающее из $SU(3)$ -редукции, соответствует группировке барионов по близости масс.

Так же обстоит дело для мезонов (таблица 15.1 из § 15.1, А). С точки зрения определения 3 здесь нет ни малейших отклонений от опыта. Особое положение ϕ - и ω -мезонов, о котором будем идти речь ниже, связано лишь с определениями 5 и 6.

Определение 4 так же хорошо, как и определение 3, описывает наблюдаемые у барионов и мезонов значения Q, Y, T, J . Так как « $SU(6)$ -классификация» не предсказывает никаких других характеристик частиц, то единственным (но, как мы увидим, существенным) различием между $SU(3)$ -редукцией и $SU(4)$ -редукцией является несовпадение некоторых векторов состояния. Существенно же это различие для массовых формул, т. е. при сравнении с определением 6.

Итак, резюмируя обсуждение определений 3 и 4, подчеркнем, что в рамках «чистой классификации» частиц, без объяснения их масс, оба эти определения одинаково хороши и не имеют преимуществ друг перед другом.

Определение 5 для барионов 56-плета вытекает из определения 6, а для 35-плета мезонов, как мы уже отмечали выше, не вытекает из определения 6 и тем самым из $SU(6)$ -теории. Поэтому при сравнении с определениями 3 и 4 в случае барионов достаточно рассмотреть определение 6, а в случае мезонов надо принять во внимание оба определения: 5 и 6.

А. 56-плёт барионов

Согласно определению 6, элементарные частицы соответствуют собственным векторам оператора (17.6.17). Дело сводится, таким образом, к сравнению этих собственных векторов, которые мы назовем t -векторами, с векторами состояния «спиновых» определений 3 и 4, которые мы назовем, для краткости, $SU(3)$ -векторами и $SU(4)$ -векторами.

Все векторы $SU(3)$ -базиса, как видно из таблицы 17.2, являются собственными векторами всех операторов $Y, T(T+1), S(S+1), N(N+1), J(J+1), C_2(3), C_2(4)$, и, тем самым, оператора (17.6.17) (напомним, что в главе 15 мы сопоставили обычные символы частиц именно векторам $SU(3)$ -базиса). Короче, все $SU(3)$ -векторы являются t -векторами. Совершенно иначе обстоит дело

для $SU(4)$ -базиса, и это обстоятельство во-видимому, до сих пор не было замечено. В § 14.2,Б мы формулировали «принципы $SU(4)$ -редукции» в форме, которая является лишь некоторой кодификацией принятой в литературе трактовки этого метода. Далее, в § 15.2,Б было показано, что строгое проведение этих принципов для 56-плета однозначно приводит к $SU(4)$ -базису, описанному в таблице $SU(4)$ -редукции. Мы обнаруживаем в этом базисе линейные комбинации векторов Ξ , Ξ_8 и, точно так же, векторов Σ , Σ_8 .

Предположим, что линейная комбинация

$$\Xi'' = \sqrt{1/3} \Xi_8 + \sqrt{2/3} \Xi$$

векторов Ξ_8 , Ξ является собственным вектором оператора m^2 . Тогда, поскольку эти векторы принадлежат одинаковым собственным значениям каждого из операторов Y , $2T(T+1)$, $2N(N+1)$, $2S(S+1)$, $C_2(4)$, входящих в (17.6.13), Ξ'' был бы собственным вектором оператора $\mu_1 \cdot C_2(3) + \mu_2 \cdot 2J(J+1)$. Но тогда векторы Ξ, Ξ_8 принадлежали бы *одному и тому же* собственному значению последнего оператора, и правые части (17.6.13) для Ξ и Ξ_8 совпадали бы, что противоречит неравенству их масс. Итак, Ξ'' не является m -вектором. Так же обстоит дело для Σ , Σ_8 . Тем самым *двадцать $SU(4)$ -векторов не являются m -векторами.*

Мы видим, что для барионов определения 3 и 6 полностью согласуются, тогда как определения 4 и 6 согласуются очень плохо. Это можно коротко выразить таким образом: *массовая формула для барионов подтверждает $SU(3)$ -редукцию и противоречит $SU(4)$ -редукции.*

Б. 35-плет мезонов

Для мезонов массовая формула $SU(3)$ -теории (Гелл-Манна — Окубо) не следует из массовой формулы $SU(6)$ -теории. Однако единственное выведенное выше соотношение (17.4.23) между массами частиц октета B_0 вытекает из (17.6.13) (см. конец § 17.6, ср. ниже вывод (18.2.3)). С другой стороны, аналогичное соотношение между массами частиц χ , ρ , ϕ противоречит опыту, и причины этого, как мы увидим ниже, выясняются с точки зрения $SU(6)$ -теории.

Таким образом, для мезонов массовая формула Гелл-Манна — Окубо оказывается несостоятельной. Так как для барионов эта формула следует из (17.6.13), то *определение 5 вообще может быть отброшено.*

Сравним теперь определения 3 и 4 с определением 6.

Все векторы $SU(3)$ -базиса, за исключением φ' , ω' , принадлежат и t -базису, так как являются собственными векторами всех операторов, входящих в (17.6.13). φ' и ω' не являются собственными векторами операторов $N(N+1)$, $S(S+1)$, $C_2(4)$; как мы увидим ниже, вследствие этого φ' и ω' не являются и собственными векторами t^2 . Итак, *все $SU(3)$ -векторы, за исключением шести векторов φ' , ω' , являются t -векторами.*

В $SU(4)$ -базисе мы обнаруживаем линейные комбинации векторов $\tilde{\chi}$ с $\tilde{\chi}^*$, χ с χ^* . Так как для $\tilde{\chi}$ и $\tilde{\chi}^*$ все операторы в (17.6.13) принимают одинаковые значения, за единственным исключением $J(J+1)$, то эти комбинации не являются собственными векторами t^2 ; так же обстоит дело для комбинаций χ с χ^* .

Далее, $SU(4)$ -векторы φ'' и ω'' являются собственными векторами всех операторов в (17.6.13), за единственным исключением $C_2(3)$. Таким образом, *четырнадцать $SU(4)$ -векторов не являются t -векторами.*

Мы видим, что для мезонов определения 3 и 6 согласуются, за исключением φ' - и ω' -мезонов; определения же 4 и 6 согласуются, за исключением χ^- , $\tilde{\chi}^-$, χ^+ , $\tilde{\chi}^+$, φ - и ω -мезонов. Итак, *массовая формула $SU(6)$ -теории для мезонов подтверждает $SU(3)$ -редукцию, за исключением φ - и ω -мезонов.*

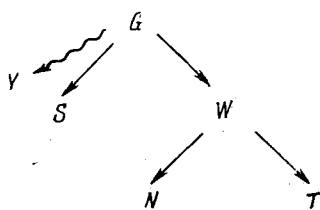
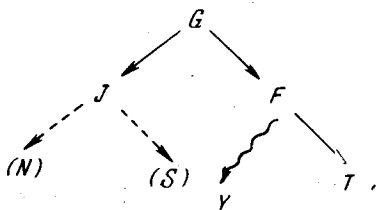
Роль $SU(4)$ -теории состоит в объяснении масс φ - и ω -мезонов. Именно, в § 18.2 будут приведены доводы в пользу того, что $SU(4)$ -векторы φ'' , ω'' близки к некоторым собственным векторам φ , ω оператора (17.6.13) (хотя, как мы видели, и не совпадают с ними). Считается поэтому, что *массовые формулы подтверждают $SU(4)$ -редукцию для φ - и ω -мезонов**.

*) Впрочем, присутствие в формуле (17.6.13) оператора Казимира $C_2(4)$ подгруппы $SU(4)$ и само по себе указывает на физический смысл этой подгруппы.

Если считать массу (или, что сводится к тому же, энергию) наиболее важной характеристикой элементарной частицы, то все предыдущее можно резюмировать следующим образом: *подавляющее большинство адронов правильно описывается $SU(6)/SU(3)$ -теорией и только небольшая часть (ϕ - и ω -мезоны) — $SU(6)/SU(4)$ -теорией.*

Такое положение вещей вполне аналогично известному делению атомов на два типа, в зависимости от связи между спином и орбитальным моментом. В самом деле, в $SU(4)$ -редукции векторы состояния являются собственными векторами операторов проекции нестрannого спина N_3 и странного спина S_3 , тогда как $SU(3)$ -векторы, вообще говоря, являются собственными векторами лишь для суммы $J_3 = S_3 + N_3$, но не для каждого слагаемого в отдельности. Первый случай аналогичен слабому типу связи между спином и орбитой ($L - S$ -связь), второй — сильному типу ($j - j$ -связь). Однако для атомов слабая связь является нормальным случаем, а сильная — аномальным, встречающимся лишь у немногих элементов; между тем для адронов нормальным является случай, описываемый $SU(3)$ -редукцией, когда N и S «сильно связаны», а ϕ - и ω -мезоны представляют аномальный тип, в котором N и S «слабо связаны» и имеют в отдельности определенные значения.

Соотношение между различными типами спина (т. е. подгруппами группы симметрии $SU(6)$) и гиперзарядом Y (не связанным ни с какой подгруппой и, следовательно, не имеющим характера спина) можно изобразить следующими диаграммами, заимствованными у Дайсона:

 $SU(3)$ -редукция $SU(4)$ -редукция

В этих диаграммах прямые стрелки соответствуют подгруппам, волнистые — оператору Y , не связанному с какой-либо подгруппой в обоих типах редукции; пунктирные стрелки обозначают связь $J_3 = N_3 + S_3$ (причем подгруппа J -спина вовсе не содержит других подгрупп диаграммы). Конечно, эти диаграммы не могут заменить точного описания подгрупп группы $SU(6)$, содержащегося в главе 13.

Важно отметить, что *расположение* в группе $SU(6)$ *изоморфных* подгрупп $SU(2)_J$, $SU(2)_T$, $SU(2)_S$ совершенно различно, тогда как подгруппы $SU(2)_T$, $SU(2)_N$, расположены одинаково (ср. комментарии в конце § 13.3). Таким образом, мы обнаруживаем *коренное различие между видами спина, связанными с изоморфными подгруппами*. Это различие не может быть замечено, если ограничиться лишь соответствующими подалгебрами Ли, так как имеет *глобальный* характер. Вообще, замена группы симметрии таблицей образующих алгебры Ли с их перестановочными соотношениями, обычная в физической литературе, приводит к утере существенной информации *).

Остановимся еще на вопросе о выборе гипермультиплетов. Мы отнесли все рассмотренные в главе 15 частицы к 56-плету и 35-плету, т. е. отождествили известные из опыта частицы с некоторыми векторами состояния именно этих двух гипермультиплетов. Массовые формулы позволяют привести серьезные аргументы в пользу этого выбора гипермультиплетов. В самом деле, как мы видели, между массами частиц 56-плета и 35-плета должен быть ряд соотношений, которые хорошо выполняются, если подставить

*) Так, например, при замене группы симметрии $SL(2)$ исторически предшествовавшей ей группой Лоренца (которую $SL(2)$ двулистно покрывает, подобно тому как $SU(2)$ покрывает $SO(3)$) теряются представления группы Пуанкаре с полуцелым спином. Так как фермионы надо включить в описание, приходится прибегнуть к так называемым «двузначным представлениям», т. е. испортить теорию представлений нарочно придуманным трюком. Между тем представления *настоящей* группы $SL(2)$ сразу дают все значения целого и полуцелого спина. Глобальное строение группы симметрии, несомненно, несет глубокую физическую информацию, которая, однако, не может быть извлечена слишком грубыми методами.

вместо них массы известных из опыта частиц Ξ , Σ , ..., η , κ , ...

Ниже мы получим еще одно соотношение между массами мезонов, приняв, однако, добавочную гипотезу.

§ 18.2. Смешение частиц типа $\varphi - \omega$

Соотношение Сакураи. Мы начнем с обоснования сделанного выше утверждения, что $SU(4)$ -векторы φ'' , ω'' близки к собственным векторам оператора m^2 для 35-плета.

Это утверждение, высказанное Сакураи, вытекает из следующей ниже аргументации.

Пользуясь таблицей § 17.6, легко получить из (17.6.13) следующие выражения масс:

$$\left. \begin{aligned} m_x^2 &= m_0^2 + 6\mu_1 + 4\mu_2 - 2\mu_4 + \mu_5, \\ m_\rho^2 &= m_0^2 + 6\mu_1 + 4\mu_2 - 8\mu_4 + 4\mu_5 + 4\mu_6. \end{aligned} \right\} \quad (18.2.1)$$

Для $SU(3)$ -частицы φ' вектор состояния не является собственным вектором операторов $N(N+1)$, $S(S+1)$, $C_2(4)$. Поэтому определим квадрат массы φ' как среднее значение оператора m^2 для соответствующего вектора состояния.

Пользуясь (17.6.14), нетрудно найти это среднее:

$$m_{\varphi'}^2 = m_0^2 + 6\mu_1 + 4\mu_2 - \frac{4}{3}\mu_6. \quad (18.2.2)$$

Сравнение с (18.2.1) приводит к соотношению

$$m_x^2 = \frac{1}{4} (3m_{\varphi'}^2 + m_\rho^2), \quad (18.2.3)$$

аналогичному (17.6.19) (и следующему также из массовой формулы $SU(3)$ -теории для мезонных октетов).

Из (18.2.3), используя значения $m_x^2 = 891$, $m_\rho^2 = 763$, находим $m_{\varphi'}^2 = 866\ 000$. Полученное среднее значение вытекает, как мы видим, из массовой формулы (17.6.13).

С другой стороны, предположим, что $SU(4)$ -векторы φ'' , ω'' достаточно близки к собственным векторам оператора m^2 для 35-плета, соответствующим наблюдаемым на опыте мезонам φ , ω . Тогда для любой линейной комбинации

$$\Psi = \alpha\varphi'' + \beta\omega''$$

можно вычислить среднее значение m^2

$$(m^2 \Psi | \Psi) = |\alpha|^2 m_\phi^2 + |\beta|^2 m_\omega^2,$$

где собственные значения m^2 заменены экспериментальными значениями квадратов масс.

Возьмем в качестве Ψ $SU(3)$ -вектор

$$\varphi' = -\sqrt{2/3} \omega'' + \sqrt{1/3} \varphi'' \quad (18.2.4)$$

(ср. (17.6.14)).

Подставляя в (18.2.5) коэффициенты $\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\beta = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ и значения масс $m_\phi = 1019$, $m_\omega = 782$ (ср. таблицы 9.2, 9.3 из § 9.1), получаем

$$(\varphi' | m^2 | \varphi') = 897\,000. \quad (18.2.5)$$

Это значение отличается от найденного выше лишь на 3%, что и подтверждает утверждение Сакураи.

Заметим, что если φ'' , ω'' близки к собственным векторам оператора m^2 , то, в силу (17.6.14), φ' , ω' не могут быть собственными векторами m^2 , в соответствии со сказанным в § 18.1.

Соотношение Бега и Синга. Теперь мы воспользуемся выражением (17.6.13) для вывода некоторого нового соотношения между массами частиц 35-плета и двумя коэффициентами μ_5 , μ_6 формулы (17.6.13). Пусть m^2 означает оператор (17.6.13) для 35-плета (следовательно, $\mu_3 = 0$, см. § 17.6).

В двумерном подпространстве, порожденном $SU(3)$ -векторами φ' , ω' , лежат $SU(4)$ -векторы φ'' , ω'' . Предположим, опираясь на предыдущие соображения, что эти последние векторы в достаточном приближении совпадают с собственными векторами для m^2 , и отождествим их поэтому с векторами состояния реальных мезонов ϕ , ω . Тогда соответствующие собственные значения оператора m^2 (обозначим их временно через λ_1 , λ_2) удовлетворяют вековому уравнению

$$\begin{vmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (18.2.6)$$

где (m_{ij}) — матрица оператора m^2 в произвольном базисе указанного двумерного подпространства. Будем, для краткости, обозначать квадраты масс частиц символами этих частиц. Тогда имеем:

$$\omega\varphi = \det m, \quad \omega + \varphi = \text{Sp } m. \quad (18.2.7)$$

В базисе (φ, ω) имеем

$$\begin{aligned} m_{11} &= (\varphi | m^2 | \varphi), \quad m_{12} = m_{21} = (\varphi | m^2 | \omega) = (\omega | m^2 | \varphi), \\ m_{22} &= (\omega | m^2 | \omega). \end{aligned} \quad (18.2.8)$$

Пользуясь соотношениями (17.6.14) и таблицей § 17.6, нетрудно найти

$$\begin{aligned} (\varphi | C_2(3) | \varphi) &= 4, \quad (\varphi | C_2(3) | \omega) = (\omega | C_2(3) | \varphi) = -2\sqrt{2}, \\ (\omega | C_2(3) | \omega) &= 2. \end{aligned} \quad (18.2.9)$$

Теперь нетрудно выразить $\det m$ и $\text{Sp } m$ через коэффициенты (17.6.13); в силу (18.2.7)

$$\left. \begin{aligned} \omega + \varphi &= 2m_0^2 + 6\mu_1 + 8\mu_2 - 4\mu_4, \\ \omega\varphi &= \begin{vmatrix} A - 2\mu_1 + 2(\mu_5 - \mu_6) & -2\sqrt{2}\mu_1 \\ -2\sqrt{2}\mu_1 & B - 4\mu_1 - 4(\mu_5 - \mu_6) \end{vmatrix} = \\ &= AB - 2\mu_1(2A + B) - 2(\mu_5 - \mu_6)(2A - B) - 8(\mu_5 - \mu_6)^2, \end{aligned} \right\} \quad (18.2.10)$$

где

$$\begin{aligned} A &= m_0^2 + 6\mu_1 + 4\mu_2 - 8\mu_4 + 4\mu_5, \\ B &= m_0^2 + 6\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_4 - 2\mu_5 - 2\mu_6. \end{aligned} \quad (18.2.11)$$

С помощью таблицы 17.2 из § 17.6 находим:

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= m_0^2 + 6\mu_1 - 2\mu_4 + \mu_5, \\ \kappa^* &= m_0^2 + 6\mu_1 + 4\mu_2 - 2\mu_4 + \mu_5, \\ \pi &= m_0^2 + 6\mu_1 - 8\mu_4 + 4\mu_5, \\ \rho &= m_0^2 + 6\mu_1 + 4\mu_2 - 8\mu_4 + 4\mu_5 + 4\mu_6. \end{aligned} \right\} \quad (18.2.12)$$

Сравнивая (18.2.11) с (18.2.12) и выражением $\omega + \varphi$ (18.2.10), легко проверить, что

$$\left. \begin{aligned} A &= \dot{\kappa} - \kappa + \pi, \\ B &= \frac{1}{2} (3\dot{\kappa} + \kappa - \pi - \rho), \\ \mu_1 &= \frac{1}{12} [5\dot{\kappa} - \kappa + \pi - \rho - 2(\omega + \varphi)] - \\ &\quad - \frac{1}{3} (\mu_5 - \mu_6). \end{aligned} \right\} \quad (18.2.13)$$

Подстановка в (18.2.10) приводит теперь к формуле

$$\begin{aligned} \omega\varphi &= \frac{1}{2} (\dot{\kappa} - \kappa + \pi) (3\dot{\kappa} + \kappa - \pi - \rho) - \\ &\quad - \frac{1}{6} [5\dot{\kappa} - \kappa + \pi - \rho - 2(\omega + \varphi)] (4\dot{\kappa} - \rho) - \\ &\quad - \frac{8}{3} (\mu_5 - \mu_6) (A - B) - 8 (\mu_5 - \mu_6)^2. \end{aligned} \quad (18.2.14)$$

Бег и Синг предположили, что $\mu_5 = \mu_6$; это приводит к хорошо удовлетворяющемуся соотношению

$$\begin{aligned} \omega\varphi &= \frac{1}{2} (\dot{\kappa} - \kappa + \pi) (3\dot{\kappa} + \kappa - \pi - \rho) - \\ &\quad - \frac{1}{6} [5\dot{\kappa} - \kappa + \pi - \rho - 2(\omega + \varphi)] (4\dot{\kappa} - \rho). \end{aligned} \quad (18.2.15)$$

Последнее соотношение не является *следствием* массовой формулы (17.6.13) для 35-плета мезонов; скорее его следует рассматривать как эмпирическое подтверждение предположения, что $\mu_5 = \mu_6$.

Соотношение Швингера. Если принять еще эмпирическое «правило интервалов» (17.6.20), также не вытекающее из массовых формул, то мы приходим к равенству $\mu_6 = 0$ (см. (17.6.21)), так что

$$\mu_5 = \mu_6 = 0. \quad (18.2.16)$$

Правило интервалов позволяет выразить π :

$$\pi = \kappa - \kappa^* + \rho, \quad (18.2.17)$$

и формула (18.2.15) принимает вид

$$\omega\varphi = \rho (2\dot{\kappa} - \rho) - \frac{2}{3} (4\dot{\kappa} - \rho) \dot{\kappa} + \frac{1}{3} (4\dot{\kappa} - \rho) (\omega + \varphi).$$

После преобразований получаем известную формулу Швингера:

$$(\omega - \rho)(\varphi - \rho) = \frac{4}{3}(\chi - \rho)(\omega + \varphi - 2\chi). \quad (18.2.18)$$

Поскольку формула (18.2.18) была получена Швингером из соображений, независимых от формулы Бега и Синга, и хорошо согласуется с опытом, можно считать предыдущие выкладки подтверждением гипотезы (18.2.16).

§ 18.3. Смешение частиц типа $\Sigma^0 - \Lambda$

Существует и другой тип смешения частиц, существенно отличный по своему характеру от $\varphi - \omega$ -смешения. $\varphi - \omega$ -смешение является *эффектом $SU(6)$ -теории*, поскольку «смешиваются» векторы состояния, принадлежащие разным F -мультиплетам, и связано с *гиперзарядовым* расщеплением масс. Напротив, $\Sigma^0 - \Lambda$ -смешение, которое мы коротко рассмотрим в этом параграфе, является «внутренним» эффектом $SU(3)$ -теории, поскольку «смешиваются» векторы состояния из одного и того же F -мультиплета, и связано с *зарядовым* расщеплением масс.

Обратимся к полной массовой формуле (17.4.10) для барионов. Как мы видели, массы частиц октета барионов $F_{1/2}$ могут быть выражены через параметры $m_0, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ массовой формулы, за исключением масс Σ^0, Λ . Для последних двух частиц собственные векторы оператора m должны быть ортогональны ко всем остальным, уже найденным собственным векторам (17.4.25) и, следовательно, расположены в собственном подпространстве $C_{0,0}(2)$, принадлежащем нулевым собственным значениям Y и Q (см. § 10.1, А). Поэтому можно искать эти векторы в виде линейных комбинаций векторов T -базиса

$$\left. \begin{aligned} \Phi_m &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_1^1 - \Psi_2^2), \\ \Phi_0 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (2\Psi_3^3 - \Psi_1^1 - \Psi_2^2). \end{aligned} \right\} \quad (18.3.1)$$

Для собственных значений мы получаем вековое уравнение (ср. аналогичное уравнение (18.2.6)); коэффициенты этого уравнения нетрудно найти, выразив векторы (18.3.1)

через векторы U -базиса Y_m, Y_0 (§ 10.1, Б) и вычислив соответствующие средние значения оператора $U(U+1)$. Полученные коэффициенты содержат параметры $m_0 + \alpha + \alpha', \gamma, \gamma'$. Значения этих параметров (а также β, β') можно найти, приравнявая выражения масс $\Sigma', \Sigma^0, \Sigma^-, \Sigma^+, N^0, N^+$ в таблице (17.4.27) экспериментальным значениям этих масс. Найдя коэффициенты векового уравнения, можно вычислить из него массы Σ^0, Λ , предсказываемые формулой масс (17.6.17); полученные значения, как читатель легко проверит, близки к экспериментальным. Таким образом, векторы состояния частиц в смысле определения 6 хотя и не совпадают с T -векторами, но весьма близки к ним. Следовательно, *массовая формула в случае частиц Σ^0, Λ подтверждает выбор T -базиса* (определение 1).

Это заключение, впрочем, вытекает уже из *гиперзарядового* расщепления масс, ввиду малости коэффициентов α', β', γ' . Значения $\beta, \gamma, \beta', \gamma'$, найденные по экспериментальным значениям масс, не удовлетворяют условию пропорциональности (17.4.9); ниже мы попытаемся понять физическую причину этого факта.

§ 18.4. Заключительные замечания

Мы исходили в $SU(6)$ -теории из общего выражения оператора m , состоящего из синглетного, октетного, ..., ..., 27-плетного и т. д. членов. Если бы мы учли только синглетный член, то получили бы в массовой формуле для 56-плета лишь выражение вида

$$m = m_0 + \beta_1 C_2(3) + \delta_1 \cdot 2J(J+1) \quad (18.3.2)$$

(коэффициенты β_1, δ_1 здесь не равны β, δ в (17.6.17), так как октетный член массовой формулы, как мы видели, также вносит вклад в β, δ). Формула (18.3.2) отнюдь не лишена смысла: *она описывает самое грубое расщепление массы 56-плета — по значению спина — и дает «массу октета» и «массу декуплета».*

Учет октетного члена в операторе массы приводит к формуле (17.6.17), описывающей расщепление на изотопические мультиплеты. При этом, как мы видели, получаются вполне удовлетворительные соотношения между

массами мультиплетов. Тем самым *синглетный и октетный члены формулы (17.5.5) вполне физически осмысленны*, что является аргументом в пользу всей концепции, положенной в основу вывода этой формулы.

Но если эта концепция принимается, то нет причин сомневаться в существовании членов в операторе массы (17.5.5), соответствующих высшим неприводимым представлениям группы $SU(3)$; вопрос только в том, насколько они влияют на значения масс. Если речь идет о гиперзарядовом расщеплении, то учет синглетного и октетного членов уже превосходно согласуется с опытом, так что декуплетный, 27-плетный и остальные члены несущественны. Иначе обстоит дело для зарядового расщепления. Это расщепление накладывается на картину гиперзарядового как малый эффект, аналогичный *сверхтонкой структуре* атомных спектров.

Нет никаких оснований предполагать, что влияние на массу, например, 27-плетного члена унитарного поля пренебрежимо и по сравнению с этим малым эффектом.

Так как мы учитывали в этой книге только синглетный и октетный члены унитарного поля, мы не получили удовлетворительного *количественного* описания зарядового расщепления. По-видимому, такое описание, не привлекающее плохо обоснованных дополнительных предположений, пока отсутствует. Высшие члены унитарного поля приводят к множеству параметров, которые при современном состоянии теории не могут быть связаны соотношениями.

На опыте наблюдаются частицы с определенными значениями энергии (и тем самым массы). Поэтому нет сомнения, что определение элементарных частиц, вытекающее из массовых формул, наиболее близко соответствует опыту. Что же означают тогда предыдущие определения, основанные на исследовании операторов спинового типа? Такие определения носят *кинематический* характер, как и все, связанное только с группой симметрии, но не с оператором массы (энергии). Можно представить себе ситуацию таким образом. Адрон оказывается системой, кинематические свойства которой позволяют ей «менять свою форму» не произвольно, а лишь в определенных «слабых местах», или «по швам». Каждой системе симметрии (состоящей из группы симметрии с фиксированной подгруппой,

или иерархией подгрупп) соответствует своя система «швов», причем «швы» разных систем могут обладать различной «прочностью».

В унитарном поле адрон «деформируется», причем «в разных местах» расходятся «швы» той или другой системы; в принципе следует считать, что они «расходятся» одновременно, но, например, для почти всех адронов заметны только «швы» $SU(3)$ -редукции, а для φ - и ω -мезонов, напротив, оказываются «более слабыми» «швы» $SU(4)$ -редукции. Это наглядное описание, разумеется, не претендует ни на какое сходство с неизвестным механизмом расщепления массы адрона, а служит лишь для уяснения роли подгрупп в физике симметрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. B é g, V. S i n g h, Phys. Rev. Letts 13, 113 (1964).
2. M. G e l l - M a n n, Report CTSL-20, Calif. Inst. of Techn. (1961).
3. F. G ü r s e y, L. A. R a d i c a t i, Phys. Rev. Letts 13, 173 (1964).
4. W. H e i s e n b e r g, Zschr. f. Phys. 77, № 1 (1932).
5. N. K e m m e r, Proc. Cambr. Phil. Soc. 34, 354 (1938).
6. J. N e ' e m a n, Nucl. Phys. 26, 222 (1961).
7. S. O k u b o, Progr. of Theor. Phys. 27, № 5 (1962).
8. S. O k u b o a. C. R y a n, Report UR-875-44, Univ. of Rochester (1964).
9. A. P a i s, Phys. Rev. Letts 13, 175 (1964).
10. A. P a i s, Rev. Mod. Phys. 38, 215 (1966).
11. E. W i g n e r, Phys. Rev. 51, 106 (1937).
12. E. W i g n e r, Ann. of Math. 40, 149 (1939).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адрон 169
Алгебра Ли 75
— —, изоморфизм 75
— —, образующие (генераторы) 76
— —, перестановочные соотношения 77
— —, подалгебра Ли 78
— —, представление 95
— —, ранг 184
— —, структурные постоянные 77
Антиизоморфизм 14
Антикварк 223
Антикоммутативность 76
Античастица 170
- Базис 12
— дуальный 25
Барийон 169
Барийонное число 169
Бозе статистика 161
Борна вероятностное истолкование 129
- Валентность 41
Вектор 11
— состояния супермультиплета 192
— — гипермультиплета 263
Вейля параметры 216
Вигнера подгруппа 247, 249
- Гайзенберга
дублет протон — нейтрона 163, 165, 166
- Гайзенберга
матричная механика 132
Гелий в ортосостоянии 222
— в парасостоянии 222
Генераторы (алгебры Ли) 76
Гильбертово пространство 15, 130
Гиперзаряд 170
Гипермомент адрона 245
Гипермультиплет 262
Градиентное преобразование 129
Группа 60
— абелева (коммутативная) 61
— бесконечная 63
— дискретная 63
— знакопеременная 69
—, изоморфизм 64
— конечная 63
— Ли 63
— — действительная линейная 65
— — ортогональная 67
— —, параметризация 63
— — полная линейная 65
— —, размерность 63
— — специальная действительная линейная 66
— — — линейная или унитарно-модулярная 65
— — — ортогональная 68
— — — унитарная 66
— — унитарная 66
— Лоренца 387
—, матричное изображение 61
—, представление 70
— Пуанкаре 387
— симметрическая 68

- Декуплет 194
 Дублет 165
- Зеемана эффект 337
- Измеримость одновременная 134
 Изоморфизм локальный 157
 — пространств 14
 Изоспин 170
 —, проекция 200
- Кварк 224
 Кварковый состав 225
 Кеммера зарядовые мультиплеты 166
 Ковектор 23
 Коммутативность 61
 Коммутатор 74
 Координаты 12
 Коши критерий сходимости 15
 Кронеккерово произведение 37
- Лептон
 Ли группа 63
 — —, произведение 74
- Масса покоя 338
 Массовые формулы 208
 — — Бега и Синга 337, 374
 — — Гелл-Манна — Окубо 337, 356
 Матрица 16
 — Гелл-Манна 82
 — Гюрши 87
 — Дирака 85
 —, кронеккерово произведение 38
 — Окубо 83, 85
 — Паули 81, 151, 169
 Мезон 170
 — векторный 277
 — псевдоскалярный 277
 Механика квантовая 127
 — — волновая 132
 — — матричная 132
- Момент 140
 — квазиорбитальный 367
 — магнитный (адрона) 286
 — нестранный 255
 — октетный 366
 — орбитальный 153
 — полный 153
 — синглетный 366
 — странный 255
 — унитарный 344
 Мультиплет 170
 — изотопический (зарядовый) 167
 — унитарный (F -мультиплет) 265
 Мультиплетность 170
- Наблюдаемая 133
 — аддитивная 227
 — основная 184
 —, полная система 254
 Накрытие 157
 фон Неймана нормировка волновых функций 129
 — общая трактовка пространства состояний 150
 Норма 130
 Нуклон 165
- Образующие внешние 81
 Октет 173
 Окубо полином 126, 194, 343
 — уравнение 125
 Оператор 16
 — антисимметризации (тензоров) 59
 — антиэрмитов 75
 — бесследный 33
 — гиперзаряда 193
 —, действия (над операторами) 17
 — диагонализированный 30
 — дуальный 25
 — заряда 176, 193
 — индуцированный 46
 — квадрата массы 343
 — массы 357
 —, матричное изображение 16
 — момента 140

- Оператор моментного типа
- 142
 - неприводимый 28
 - обратимый 60
 - обратный 18
 - , окрестность 90
 - , определитель 19
 - , ортогональная сумма 28
 - , подобие 20
 - приводимый 28
 - проектирующий 21
 - симметризации (тензоров) 59
 - , система 29
 - скалярный 364
 - , след 33
 - сопряженный 18
 - тождественный 17
 - унимодулярный 20
 - унитарный 18
 - Шредингера 134
 - эрмитов 18
- Отношение магнитных моментов (протона и нейтрона) 336
- Перестановочные соотношения 77**
- Подгруппа 61
- Вигнера 247, 248
 - изоспина 243
 - нестранного спина 250
 - обычного (J) спина 235
 - странного спина 250
 - унитарного (F) спина 235
- Подпространство 15
- , ортогональная сумма 21
- Поле кулоново 338
- магнитное 338
 - унитарное 337, 345
- Представление группы вращений 135
- индуцированное 71
 - локальное 142
 - неприводимое 74
 - операторное 125
 - приводимое 74
 - , произведение 72
 - разрешенное 251
 - регулярное 117
 - , редукция 184
 - скалярное 71
 - , степень 70
- Представление, сумма 72
- тензорное 112
 - тождественное (фундаментальное) 71
 - точное 71
 - тривиальное 71
 - , унитарная эквивалентность 73
 - унитарное 70
 - , эквивалентность 73
- Проекция 21
- Произведение вектора на ко-вектор 23
- Ли 74
 - операторов 17
 - скалярное 11
 - тензора на число 39, 40
 - тензоров 53
- Пространство (комплексное евклидово) 111
- дуальное 22
 - конечномерное 12
 - , ортогональная сумма 21, 26
 - , размерность 12
 - сепарабельное 15
 - собственное 32
 - , тензорное произведение 37
 - унитарное 12
- Ранг (алгебры Ли) 184
- Редукция представления 184
- Сакураи соотношение 388
- Симметрия сферическая 134
- унитарная 169
- Синглет 188
- Смешение частиц 271, 388, 392
- Собственное значение 31
- —, кратность 32
- Собственный вектор 31
- Состояние физической системы 128
- Спектр атомный, сверхтонкая структура 394
- —, тонкая структура 342
 - масс адрона 368
- Спин 152
- вигнеров (W) 247, 252

- Спин изотопический 168,
170
— нестранный (N) 250, 252,
255
— обычный (J) 240
— оператор 153
— странный (S) 250, 253, 255
— унитарный (F) 223, 240
— G 365
— T 200
— U 200
— V 201
Спинор 100
Спинтензор 100
Среднее значение 328
Сумма тензоров 45
Супермультиплет 172
—, гиперзарядовое расщепле-
ние 357
—, зарядовое расщепление 360
- Тензор 41
—, антисимметризация (тензо-
ров) 59
— антисимметрический 58
— бисимметрический 58
—, валентность 41
— ковариантный 41
—, координаты (компоненты) 43
— магнитного поля 341
—, свертывание 55
—, симметризация 59
— симметрический 56
—, умножение 53
Тензороператор 121
— бесследный 122
— инвариантный 122, 125
— унитарного момента 344
Тип симметрии (тензоров) 102
Ток «квазиорбитальный» 365
- Уленбека и Гаудсмита представ-
ление 149
Уравнение вековое 31, 32
- Ферми статистика 161
Функция антилинейная 24
— волновая 128
— —, вероятностное истолкова-
ние 129
— — нормированная 129
— линейная 24
— полилинейная 52
— Эрмита 131
- Частица 128
— «истинно-нейтральная» 170
— элементарная 169, 197, 263,
267
— $SU(3)$ 248
— $SU(4)$ 248
Четность 170
- Швингера соотношение 391
Шредингера волновая механика
132, 150,
— оператор 133
- Эйнштейна правило суммирова-
ния 13
Экспоненциал 89
Экспоненциальная связь 92
Электрон 149
Энергия 133
- Юнга схема 103
- Якоби тождество 76